$$_{\vdash}\forall x\mathrm{A}\vee\mathrm{B}\ _{\dashv}\forall x(\mathrm{A}\vee\mathrm{B})$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$_{\vdash}\forall x\mathrm{A},\ _{\dashv}\forall x(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}) \qquad\qquad _{\vdash}\mathrm{B}\ _{\dashv}\forall x(\mathrm{A}\vee\mathrm{B})$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$_{\vdash}\forall x\mathrm{A},\ _{\dashv}R_z^x(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}) \qquad\qquad _{\vdash}\mathrm{B},\ _{\dashv}R_z^x(\mathrm{A}\vee\mathrm{B})$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$_{\vdash}\forall x\mathrm{A},\ _{\dashv}R_z^x(\mathrm{A})\vee R_z^x(\mathrm{B}) \qquad\qquad _{\vdash}\mathrm{B},\ _{\dashv}R_z^x(\mathrm{A})\vee R_z^x(\mathrm{B})$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$_{\vdash}\forall x\mathrm{A},\ _{\vdash}R_x^x(\mathrm{A}),\ _{\vdash}R_z^x(\mathrm{A}),\ _{\dashv}R_z^x(\mathrm{A})\vee R_z^x(\mathrm{B}) \qquad _{\vdash}\mathrm{B},\ _{\dashv}R_z^x(\mathrm{A}),\ _{\dashv}R_z^x(\mathrm{B})$$

$$\downarrow$$

$$_{\vdash}\forall x\mathrm{A},\ _{\vdash}\mathrm{A},\ _{\vdash}R_z^x(\mathrm{A}),\ _{\dashv}R_z^x(\mathrm{A}),\ _{\dashv}R_z^x(\mathrm{B})\ \boxtimes\ .$$

Отримали незамкнене секвенційне дерево. За незамкненим шляхом задамо контрмодель (M, δ), для якої $M = \{a, b\}$, $\delta = [x\mapsto a, z\mapsto b]$. Маємо $r_z^x(\delta) = [x\mapsto b, z\mapsto b]$, звідки $\mathrm{B}_M(\delta) = T$,

$$R_z^x(\mathrm{A})_M(\delta) = \mathrm{A}_M(r_z^x(\delta)) = F,\ \ R_z^x(\mathrm{B})_M(\delta) = \mathrm{B}_M(r_z^x(\delta)) = F\ .$$

Секвенція $_{\vdash}\forall x\mathrm{A}\vee\mathrm{B}\ _{\dashv}\forall x(\mathrm{A}\vee\mathrm{B})$ невивідна, що спростовує $\forall x\mathrm{A}\vee\mathrm{B} \models \forall x(\mathrm{A}\vee\mathrm{B})$.

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть базові секвенційні форми *QEC*-числень.
2. Сформулюйте теорему про основну властивість секвенційних форм *QEC*-числень.
3. Опишіть побудову виведення в *QEC*-численні для заданої скінченної секвенції.
4. Опишіть побудову виведення в *QEC*-численні для заданої зліченної секвенції.
5. Сформулюйте теорему коректності для *QEC*-числень.
6. Дайте визначення модельної множини для випадку *QEC*-числень.
7. Сформулюйте теорему про контрмодель для *QEC*-числень.
8. Сформулюйте теорему повноти для *QEC*-числень.

Вправи

1. Запишіть похідні секвенційні форми *QEC*-числень типів R$\to$, R&, R$\forall$s, R$\forall$.

2. Побудуйте в *QEC*-численні виведення чи доведіть його відсутність (указавши контрмодель) для таких формул:

1) $\exists x(\mathrm{A}\vee\mathrm{B})\leftrightarrow\exists x\mathrm{A}\vee\exists x\mathrm{B}$;
2) $\forall x\mathrm{A}\&\forall x\mathrm{B}\to\forall x(\mathrm{A}\&\mathrm{B})$;
3) $\forall x(\mathrm{A}\to\mathrm{B})\to(\exists x\mathrm{A}\to\exists x\mathrm{B})$;
4) $\forall x(\mathrm{A}\to\mathrm{B})\to(\forall x\mathrm{A}\to\forall x\mathrm{B})$;
5) $\exists x(\mathrm{A}\to\mathrm{B})\to(\forall x\mathrm{A}\to\exists x\mathrm{B})$;
6) $(\forall x\mathrm{A}\to\forall x\mathrm{B})\to\forall x(\mathrm{A}\to\mathrm{B})$;
7) $(\exists x\mathrm{A}\to\exists x\mathrm{B})\to\forall x(\mathrm{A}\to\mathrm{B})$;
8) $\forall x(\mathrm{A}\vee\mathrm{B})\to\forall x\mathrm{A}\vee\mathrm{B}$;
9) $\exists x\mathrm{A}\&\mathrm{B}\to\exists x(\mathrm{A}\&\mathrm{B})$;
10) $\exists x(\mathrm{A}\&\mathrm{B})\to\exists x\mathrm{A}\&\mathrm{B}$;
11) $\exists y\forall x\mathrm{A}\to\forall x\exists y\mathrm{A}$;
12) $\forall x\forall y(\mathrm{B}\to\mathrm{P})\to\forall y(\forall x\neg\mathrm{P}\to\forall x\neg\mathrm{B})$;
*13) $\forall x\exists y\mathrm{A}\to\exists y\forall x\mathrm{A}$;
14) $\forall u\forall v(R^{x,y}_{u,v}\mathrm{A}\leftrightarrow R^{x}_{u}\mathrm{B}\,\&\,R^{x}_{v}\mathrm{B})\to\forall u\forall v(R^{x,y}_{u,v}\mathrm{A}\to R^{x,y}_{v,u}\mathrm{A})$.

6.4. Секвенційні числення неокласичних логік функціонально-еквацийного рівня

Опишемо секвенційні числення першопорядкових логік еквітонних квазіарних предикатів функціонально-еквацийного рівня – ФЕНКЛ. Базовими композиціями цих логік є $\neg$, $\vee$, $\mathrm{S}^{\bar{x}}$, $'x$, $\exists x$, =. Такі секвенційні числення ФЕНКЛ назвемо *FQEC*, вони є подальшим розвитком відомих [9, 26] числень *FEZN*.

Умови замкненості секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ у *FQEC* індуковані відповідними умовами гарантованої наявності відношення неспростовнісного логічного наслідку $\Gamma\models\Delta$:

C) існує формула Φ така, що $\Phi\in\Gamma$ та $\Phi\in\Delta$;

CRf) $t=t\in\Delta$ для деякого $t\in Tr$.

Базові секвенційні форми числення *FQEC* індуковані наведеними в розділі 4 відповідними семантичними властивостями відношення неспростовнісного логічного наслідку |=.

1. Допоміжні секвенційні форми для нормалізації термів.

Нехай Ψ отримана із Φ виконанням кроку нормалізації термів на основі властивостей SIT, SST, CNT, CUT, SD, SF. Тоді отримуємо базові секвенційні форми $_{\vdash}$SIT та $_{\dashv}$SIT, $_{\vdash}$SST та $_{\dashv}$SST, $_{\vdash}$CNT та $_{\dashv}$CNT, $_{\vdash}$CUT та $_{\dashv}$CUT, $_{\vdash}$SD та $_{\dashv}$SD, $_{\vdash}$SF та $_{\dashv}$SF.

Зазначені форми мають такий вигляд (тут тип означає SIT, SST, CNT, CUT, SD, SF):

$$_{\vdash}\text{тип}\ \frac{_{\vdash}\Psi,\Sigma}{_{\vdash}\Phi,\Sigma} \qquad\qquad _{\dashv}\text{тип}\ \frac{_{\dashv}\Psi,\Sigma}{_{\dashv}\Phi,\Sigma}$$

Базові секвенційні форми $_{\vdash}$SIT та $_{\dashv}$SIT, $_{\vdash}$SST та $_{\dashv}$SST, $_{\vdash}$CNT та $_{\dashv}$CNT, $_{\vdash}$CUT та $_{\dashv}$CUT, $_{\vdash}$SD та $_{\dashv}$SD, $_{\vdash}$SF та $_{\dashv}$SF індукують похідні секвенційні форми нормалізації термів:

$$_{\vdash}\text{NrTr}\ \frac{_{\vdash}\text{B},\Sigma}{_{\vdash}\text{A},\Sigma} \qquad\qquad _{\dashv}\text{NrTr}\ \frac{_{\dashv}\text{B},\Sigma}{_{\dashv}\text{A},\Sigma}$$

Тут Ψ отримана із Φ нормалізацією термів згідно із SIT, SST, CNT, CUT, SD, SF.

2. Допоміжні секвенційні форми елімінації за неістотними іменами та спрощення формул:

$$_{\vdash}\text{SI}\Phi\ \frac{_{\vdash}\Phi,\Sigma}{_{\vdash}S(\Phi),\Sigma}; \qquad\qquad _{\dashv}\text{SI}\Phi\ \frac{_{\dashv}\Phi,\Sigma}{_{\dashv}S(\Phi),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\text{CN}\Phi\ \frac{_{\vdash}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}),\Sigma}{_{\vdash}S^{x,\bar{v}}(\Phi,{}'x,\bar{t}),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\text{CN}\Phi\ \frac{_{\dashv}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}),\Sigma}{_{\dashv}S^{x,\bar{v}}(\Phi,{}'x,\bar{t}),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\text{CU}\Phi\ \frac{_{\vdash}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}),\Sigma}{_{\vdash}S^{x,\bar{v}}(\Phi,t,\bar{t}),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\text{CU}\Phi\ \frac{_{\dashv}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}),\Sigma}{_{\dashv}S^{x,\bar{v}}(\Phi,t,\bar{t}),\Sigma}.$$

Для $_{\vdash}$CUΦ та $_{\dashv}$CUΦ маємо умову $x\in\mu(\Phi)$.

3. Секвенційні форми еквівалентних перетворень:

$$_{\vdash}\mathrm{S}\neg\ \frac{_{\vdash}\neg S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\vdash}S^{\bar v}(\neg\Phi,\bar t),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{S}\neg\ \frac{_{\dashv}\neg S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\dashv}S^{\bar v}(\neg\Phi,\bar t),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{S}\vee\ \frac{_{\vdash}S^{\bar v}(\Phi,\bar t)\vee S^{\bar v}(\Psi,\bar t),\Sigma}{_{\vdash}S^{\bar v}(\Phi\vee\Psi,\bar t),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{S}\vee\ \frac{_{\dashv}S^{\bar v}(\Phi,\bar t)\vee S^{\bar v}(\Psi,\bar t),\Sigma}{_{\dashv}S^{\bar v}(\Phi\vee\Psi,\bar t),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{S}\exists\mathrm{s}\ \frac{_{\vdash}\exists xS^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\vdash}S^{\bar v}(\exists x\Phi,\bar t),\Sigma};\ ; \qquad _{\dashv}\mathrm{S}\exists\mathrm{s}\ \frac{_{\dashv}\exists xS^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\dashv}S^{\bar v}(\exists x\Phi,\bar t),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{S}\exists\ \frac{_{\vdash}\exists yS^{\bar v,x}(\Phi,\bar t,'y),\Sigma}{_{\vdash}S^{\bar v}(\exists x\Phi,\bar t),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{S}\exists\ \frac{_{\dashv}\exists yS^{\bar v,x}(\Phi,\bar t,'y),\Sigma}{_{\dashv}S^{\bar v}(\exists x\Phi,\bar t),\Sigma}.$$

Для $_{\vdash}\mathrm{S}\exists\mathrm{s}$ та $_{\dashv}\mathrm{S}\exists\mathrm{s}$ маємо умови $x\notin\{\bar v\}$ та $x\in\mu(\bar t)$.

Для $_{\vdash}\mathrm{S}\exists$ та $_{\dashv}\mathrm{S}\exists$ маємо умови

$y\in V_T\setminus ndn(S^{\bar v}(\exists x\Phi,\bar t))$, причому $x\in\{\bar v\}$ або $x\notin\mu(\bar t)$.

Нехай Ψ отримана із Φ згорткою суперпозицій згідно із SSΦ. Тоді маємо такі форми:

$$_{\vdash}\mathrm{SS\Phi}\ \frac{_{\vdash}\Psi,\Sigma}{_{\vdash}\Phi,\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{SS\Phi}\ \frac{_{\dashv}\Psi,\Sigma}{_{\dashv}\Phi,\Sigma}.$$

4. Секвенційні форми пронесення суперпозиції через рівність:

$$_{\vdash}\mathrm{SE}\ \frac{_{\vdash}S^{\bar v}(t,\bar t)=S^{\bar v}(s,\bar t),\Sigma}{_{\vdash}S^{\bar v}(t=s,\bar t),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{SE}\ \frac{_{\dashv}S^{\bar v}(t,\bar t)=S^{\bar v}(s,\bar t),\Sigma}{_{\dashv}S^{\bar v}(t=s,\bar t),\Sigma}.$$

5. Секвенційні форми декомпозиції формул:

$$_{\vdash}\neg\ \frac{_{\dashv}\Phi,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg\Phi,\ \Sigma}; \qquad _{\dashv}\neg\ \frac{_{\vdash}\Phi,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg\Phi,\ \Sigma};$$

$$_{\vdash}\vee\ \frac{_{\vdash}\Phi,\ \Sigma \qquad _{\vdash}\Psi,\ \Sigma}{_{\vdash}\Phi\vee\Psi,\ \Sigma}; \qquad _{\dashv}\vee\ \frac{_{\dashv}\Phi,\ _{\dashv}\Psi,\ \Sigma}{_{\dashv}\Phi\vee\Psi,\ \Sigma}.$$

6. Секвенційні форми елімінації кванторів:

$$_{\vdash}\exists\ \frac{_{\vdash}S^{x}(\Phi,'y),\Sigma}{_{\vdash}\exists x\Phi,\Sigma},\ \text{де } y\in V_{T}\ \text{ та } y\notin ndn(\Sigma,\Phi)\,;$$

$$_{\dashv}\exists\ \frac{_{\dashv}S^{x}(\Phi,t),\ _{\dashv}\exists x\Phi,\Sigma}{_{\dashv}\exists x\Phi,\Sigma}\,.$$

При застосуванні $_{\dashv}\exists$ терм t нормальний, побудований із ФС і ДНС-дублів імен доступних формул секвенції $_{\dashv}\exists x\Phi,\Sigma$ та її наступників.

7. Форми, пов'язані із симетричністю і транзитивністю рівності та заміною рівних:

$$\mathrm{Sm}\ \frac{_{\vdash}t=s,\ _{\vdash}s=t,\ \Sigma}{_{\vdash}t=s,\ \Sigma}\,;$$

$$\mathrm{Tr}\ \frac{_{\vdash}t=s,\ _{\vdash}s=r,\ _{\vdash}t=r,\ \Sigma}{_{\vdash}t=s,\ _{\vdash}s=r,\ \Sigma}\,;$$

$$_{\vdash}\mathrm{ET}\ \frac{_{\vdash}t=s,\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t)=\tau,\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},s)=\tau,\ \Sigma}{_{\vdash}t=s,\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t)=\tau,\ \Sigma}\,;$$

$$_{\dashv}\mathrm{ET}\ \frac{_{\vdash}t=s,\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t)=\tau,\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},s)=\tau,\ \Sigma}{_{\vdash}t=s,\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t)=\tau,\ \Sigma}\,;$$

$$_{\vdash}\mathrm{E}\Phi\ \frac{_{\vdash}t=s,\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t),\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},s),\Sigma}{_{\vdash}t=s,\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t),\Sigma}\,;$$

$$_{\dashv}\mathrm{E}\Phi\ \frac{_{\vdash}t=s,\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t),\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},s),\Sigma}{_{\vdash}t=s,\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t),\Sigma}\,.$$

Основна властивість секвенційних форм *FQEC* формулюється ідентично формулюванню теореми 6.3.1 для *QEC*-числень.

Опишемо побудову виведення – секвенційного дерева – для заданої секвенції Σ (зліченної в загальному випадку). Така побудова розбита на етапи. Вона починається з кореня дерева. При цьому кожне застосування секвенційної форми проводиться лише до скінченної множини доступних на поточний момент формул. Секвенції – це *множини* специфікованих формул, тому повторів формул у секвенціях немає.

На початку етапу виконується *крок доступу*: до списку доступних додається по одній формулі зі списків $\vdash$-формул та $\dashv$-формул. Якщо відповідний список вичерпано, то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі з невичерпаного списку. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків.

З кожним листом дерева пов'язуємо списки *ATr*, *AFs*, *ADn* активних термів, ФС, ДНС-дублів імен. Терми будуються із ФС та ДНС-дублів імен доступних формул.

Після виконання кожної форми перевіряємо, чи будуть усі листи будованого дерева замкненими секвенціями. При появі замкненої секвенції до неї вже не застосовна жодна форма, отже, процес побудови дерева на цьому шляху обривається.

Якщо всі листи побудованого дерева замкнені, то ми отримали замкнене секвенційне дерево і побудову завершено позитивно. Якщо ні, то для кожного незамкненого листа робимо наступний крок доступу, відповідно розширюємо *AFs* та *ADn*.

Нехай після додавання до секвенції-листа нових доступних формул отримано секвенцію η. Далі добудовуємо скінченне піддерево з вершиною η таким чином.

Активізуємо всі доступні непримітивні секвенції η. До кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму. Після застосування до Ф основної форми ця Ф та формули, утворені з неї такою формою, на зазначеному етапі пасивні, до таких формул на цьому етапі основні форми незастосовні.

Спочатку виконуємо $\vdash\exists$-форми. Після кожного такого виконання беремо новий $v \in TN$ та розширюємо *ADn*. Потім розширюємо *ATr*, будуючи з наявних *AFs* та *ADn* усілякі терми в нормальній формі зі вкладеністю суперпозицій $\leq k$. На цьому етапі довжини списків імен суперпозицій $\leq k$, у них для кожного ФС f можна застосувати тільки перші k імен, які не є неістотними для f (якщо f має $<k$ таких імен, то використовуємо тільки їх).

Після виконання $_{\vdash}\exists$-форм виконуємо $_{\vdash}S\exists$-форми та $_{\dashv}S\exists$-форми. При цьому беремо $y\in V_T$ таке, що $y\notin ndn(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}))$, з наявних імен доступних формул. Якщо такого *y* серед наявних імен немає, то беремо як *y* нове ім`я з *TN*, після чого розширюємо *ADn* та *ATr*.

Далі до кожної з решти активних формул застосовуємо відповідну форму типу $_{\vdash}SS\Phi$, $_{\dashv}SS\Phi$, $_{\vdash}S\neg$, $_{\dashv}S\neg$, $_{\vdash}S\vee$, $_{\dashv}S\vee$, $_{\vdash}S\exists s$, $_{\dashv}S\exists s$, $_{\vdash}\neg$, $_{\dashv}\neg$, $_{\vdash}\vee$, $_{\dashv}\vee$, $_{\dashv}\exists$. Форма $_{\dashv}\exists$ застосовується багатократно, для цього використовуємо терми із *ATr*.

У процесі застосування основних форм за необхідності виконуємо спрощення. Для цього кожного разу за виникнення відповідної ситуації застосовуємо належну допоміжну форму типів CNΦ, CUΦ, CIΦ. Кожного разу при отриманні елементарної формули для неї виконуємо форму нормалізації термів (типу NrTr) до тих пір, поки всі її терми не набудуть нормальної форми.

Застосування форм рівності має певні особливості.

Форми Sm виконуються кожного разу при появі (активізації) *нової* для секвенції формули вигляду $_{\vdash}t=s$.

Форми Tr виконуємо кожного разу при активізації пари формул $_{\vdash}t=s$ та $_{\vdash}s=r$, якщо хоч одна з них *нова* для секвенції.

Форми типу ET виконуються кожного разу при активізації пари формул, одна з яких має вигляд $_{\vdash}t=s$, а інша – вигляд $_{\vdash}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t)=\tau$ чи $_{\dashv}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t)=\tau$, причому принаймні одна з них нова для секвенції. Форми типу EΦ виконуються кожного разу при активізації пари формул, одна з яких має вигляд $_{\vdash}t=s$, а інша – вигляд $_{\vdash}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t)$ чи $_{\dashv}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t)$, причому принаймні одна з них нова для секвенції.

При побудові секвенційного дерева для зліченної секвенції можливі такі випадки:

1) усі листи будованого дерева замкнені, тобто маємо скінченне замкнене дерево; тоді побудову завершено позитивно;

2) побудова не завершується, маємо нескінченне дерево. У цьому випадку в дереві існує нескінченний незамкнений шлях $\wp$, його вершини не можуть бути замкненими секвенціями.

Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на шляху $\wp$ і стане доступною.

Для *FQEC*-числень справджуються теореми коректності та повноти.

Теорема 6.4.1 (коректності). Нехай секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *FQEC*. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Теорема 6.4.2 (повноти). Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *FQEC*.

Теорема повноти спирається на теорему про побудову контрмоделі для множини формул незамкненого шляху.

Теорема 6.4.3 (про контрмоделі). Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, побудованому для секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують $\boldsymbol{A} = (A, I)$ та $\delta \in {}^{V}\!A$ такі:

$$_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T \text{ та } {}_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F.$$

Таку пару $(\boldsymbol{A}, \delta)$ назвемо контрмоделлю для секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$.

Опишемо побудову контрмоделі за модельною множиною H.

Нехай $W = \{v_0, \ldots, v_n, \ldots\}$ – множина всіх предметних імен, що фігурують у ДНС та символах суперпозиції формул H, нехай $Dn = \{'v \mid v \in W\}$. Нехай Tr – множина всіх нормальних термів, що фігурують у формулах H. Задамо $TW = Tr \cup Dn$.

Нехай $TW = \{t_0, t_1, ..., t_n, \ldots\}$, причому кожне $'v_j$ – це t_{kj}. Візьмемо множину A таку, що існує бієкція між TW та A. Кожному $t_i \in TW$ відповідає $a_i \in A$, причому кожному $'v_j$ відповідає a_{kj}.

Задамо $\delta = [v_0 \mapsto a_{k0}, \ldots, v_j \mapsto a_{kj}, \ldots]$.

Для всіх $f \in Fns$, наявних в H, задамо f_A та f_B так, щоб виконувалась умова:

$$(t_i)_A(\delta) = a_i \text{ для всіх } t_i \in Tr.$$

Для $t_{kj} = {}'v_j$ маємо $(t_{kj})_A(\delta) = ({}'v_j)_A(\delta) = a_{kj}$.

Нехай $t_m = f \in Fns$. Задаємо $f_A(\delta) = (t_m)_A(\delta) = a_m$.

Для всіх інших $t_m \in TW$ значення задаємо індукцією за побудовою терму.

Нехай t_p – це $S^{v_{i1},\ldots,v_{in}} f t_{j1} \ldots t_{jn}$, де $f = t_m \in Fns$.

Тоді маємо $f_A(\delta) = (t_m)_A(\delta) = a_m$, $(t_{j1})_A(\delta) = a_{j1}$, …, $(t_{jn})_A(\delta) = a_{jn}$. Тому задамо

$$f_A(\delta\nabla v_{i1}\mapsto a_{j1},...,v_{in}\mapsto a_{jn}) = f_B(\delta\nabla v_{i1}\mapsto a_{j1},...,v_{in}\mapsto a_{jn}) = a_p$$

.

Задамо тепер значення примітивних формул на δ:

– $\vdash p\in H \Rightarrow p_A(\delta) = T$;

– $\dashv p\in H \Rightarrow p_A(\delta) = F$;

– $\vdash S^{v_1,...,v_n} pt_{j1}...t_{jn} \in H \ \Rightarrow p_A(\delta\nabla v_1\mapsto a_{j1}\nabla\ldots\nabla v_n\mapsto a_{jn}) = T$;

– $\dashv S^{v_1,...,v_n} pt_{j1}...t_{jn} \in H \ \Rightarrow p_A(\delta\nabla v_1\mapsto a_{j1}\nabla\ldots\nabla v_n\mapsto a_{jn}) = F$.

Приклад 6.4.1. Виведення у *FQEC* секвенції $\vdash\forall x\mathrm{P}, \dashv\exists x\mathrm{P}$. Тут маємо атомарний терм $'x$.

$$\vdash\forall x\mathrm{P}, \dashv\exists x\mathrm{P}$$
$$\downarrow$$
$$\vdash\forall x\mathrm{P},\ \vdash S^x(\mathrm{P},'x),\ \dashv\exists x\mathrm{P},\ \vdash S^x(\mathrm{P},'x)\ \boxtimes$$

Приклад 6.4.2. Укажемо виведення у *FQEC* секвенції $\vdash\forall xS^v(\mathrm{P}, S^v(f,'x)), \dashv\exists xS^v(\mathrm{P},'x)$ за умови, що x неістотне для f та P. Тут маємо атомарні терми $'x$, $'v$, f. При побудові секвенційного дерева виконуємо спрощення та елімінації за неістотним іменем.

$$\vdash\forall xS^v(\mathrm{P}, S^v(f,'x)), \dashv\exists xS^v(\mathrm{P},'x)$$
$$\downarrow$$
$$\vdash\forall xS^v(\mathrm{P}, S^v(f,'x)),\ \vdash S^x(S^v(\mathrm{P}, S^v(f,'x)),'x),\ \vdash S^x(S^v(\mathrm{P}, S^v(f,'x)),'v),$$
$$\vdash S^x(S^v(\mathrm{P}, S^v(f,'x)),f),\ \dashv\exists xS^v(\mathrm{P},'x),\ \dashv S^x(S^v(\mathrm{P},'x),'x),$$
$$\dashv S^x(S^v(\mathrm{P},'x),'v),\ \dashv S^x(S^v(\mathrm{P},'x),f)$$
$$\downarrow$$
$$\vdash\forall xS^v(\mathrm{P}, S^v(f,'x)),\ \vdash S^v(\mathrm{P}, S^v(f,'x)),\ \vdash S^x(S^v(\mathrm{P}, S^v(f,'x)),'v),$$
$$\vdash S^x(S^v(\mathrm{P}, S^v(f,'x)),f),\ \dashv\exists xS^v(\mathrm{P},'x),\ \dashv S^v(\mathrm{P},'x),$$
$$\dashv S^{xv}(\mathrm{P},'v,S^x('x,'v)),\ \dashv S^{xv}(\mathrm{P},f,S^x('x,f))$$
$$\downarrow$$
$$\vdash\forall xS^v(\mathrm{P}, S^v(f,'x)),\ \vdash\mathrm{P},\ \ldots,\ \dashv\exists xS^v(\mathrm{P},'x),\ \dashv\mathrm{P},\ \ldots\ \boxtimes$$

Приклад 6.4.3. З'ясуємо, чи справджується $\forall x S^{v}(\mathrm{P}, f) \models_{\dashv} \exists x S^{v}(\mathrm{P}, {}'x)$. Побудуємо у *FQEC* виведення секвенції ${}_{\vdash}\forall x S^{v}(\mathrm{P}, f), {}_{\dashv}\exists x S^{v}(\mathrm{P}, {}'x)$. Тут атомарні терми ${}'x, {}'v, f$. Далі маємо терми $S^{x}(f, {}'v)$, $S^{v}(f, {}'x)$, $S^{x}(f, f))$, $S^{v}(f, f))$, … При побудові секвенційного дерева виконуємо спрощення та елімінації за неістотним іменем.

$$\begin{array}{c}
{}_{\vdash}\forall x S^{v}(\mathrm{P}, f), {}_{\dashv}\exists x S^{v}(\mathrm{P}, {}'x) \\
\downarrow \\
{}_{\vdash}\forall x S^{v}(\mathrm{P}, f),\ {}_{\vdash}S^{x}(S^{v}(\mathrm{P}, f), {}'x),\ {}_{\vdash}S^{x}(S^{v}(\mathrm{P}, f), {}'v),\ {}_{\vdash}S^{x}(S^{v}(\mathrm{P}, f), f), \\
{}_{\dashv}\exists x S^{v}(\mathrm{P}, {}'x),\ {}_{\dashv}S^{x}(S^{v}(\mathrm{P}, {}'x), {}'x),\ {}_{\dashv}S^{x}(S^{v}(\mathrm{P}, {}'x), {}'v),\ {}_{\dashv}S^{x}(S^{v}(\mathrm{P}, {}'x), f) \\
\downarrow \\
{}_{\vdash}\forall x S^{v}(\mathrm{P}, f),\ {}_{\vdash}S^{v}(\mathrm{P}, f),\ {}_{\vdash}S^{xv}(\mathrm{P}, {}'v, S^{x}(f, {}'v)),\ {}_{\vdash}S^{xv}(\mathrm{P}, f, S^{x}(f, f)), \\
{}_{\dashv}\exists x S^{v}(\mathrm{P}, {}'x),\ {}_{\dashv}S^{v}(\mathrm{P}, {}'x),\ {}_{\dashv}S^{xv}(\mathrm{P}, {}'v, S^{x}({}'x, {}'v)),\ {}_{\dashv}S^{xv}(\mathrm{P}, f, S^{x}({}'x, f)) \\
\downarrow \\
{}_{\vdash}\forall x S^{v}(\mathrm{P}, f),\ {}_{\vdash}S^{v}(\mathrm{P}, f),\ {}_{\vdash}S^{xv}(\mathrm{P}, {}'v, S^{x}(f, {}'v)),\ {}_{\vdash}S^{xv}(\mathrm{P}, f, S^{x}(f, f)), \\
{}_{\dashv}\exists x S^{v}(\mathrm{P}, {}'x),\ {}_{\dashv}S^{v}(\mathrm{P}, {}'x),\ {}_{\dashv}S^{x}(\mathrm{P}, {}'v),\ {}_{\dashv}S^{xv}(\mathrm{P}, f, f) \\
\downarrow \\
\ldots
\end{array}$$

Отримуємо незамкнене секвенційне дерево, тому далі будуємо контрмодель. Маємо $W = \{x, v\}$;

$TW = \{{}'x, {}'v, f, S^{x}(f, {}'v), S^{v}(f, {}'x), S^{x}(f, f)), S^{v}(f, f)), \ldots\}$;

відповідна $A = \{a, b, c, e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots\}$.

Задаємо $\delta = [x \mapsto a, v \mapsto b]$. Для будованої $\boldsymbol{A} = (A, I)$ маємо:

$f_A(\delta) = c$, $S^{x}(f, {}'v)_A(\delta) = e_1$, $S^{v}(f, {}'x)_A(\delta) = e_2$, $S^{x}(f, f)_A(\delta) = e_3$, $S^{v}(f, f)_A(\delta) = e_4$, … Далі маємо: $S^{v}(\mathrm{P}, f)_A(\delta) = T$, $S^{v}(\mathrm{P}, {}'x)_A(\delta) = F$, $S^{x}(\mathrm{P}, {}'v)_A(\delta) = F$, $S^{xv}(\mathrm{P}, f, f)_A(\delta) = F$, …

Приклад 6.4.4. Для з'ясування того, чи справджується твердження $\exists x S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee {}'x = f \models \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {}'x)$, побудуємо у *FQEC* виведення секвенції ${}_{\vdash}\exists x S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee {}'x = f, {}_{\dashv}\exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {}'x)$.

При побудові беремо нове $z \in V_T$.

$$\vdash \exists x S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee {'x} = f,\ \dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x})$$

$$\swarrow \qquad\qquad\qquad \searrow$$

$$\vdash \exists x S^{v}(\mathrm{P}, f),\ \dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x})$$

$$\downarrow$$

$$\vdash S^{z}(S^{v}(\mathrm{P}, f), {'z}),$$
$$\dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x})$$

$$\downarrow$$

$$\vdash S^{zv}(\mathrm{P}, {'z}, S^{z}(f, {'z})),$$
$$\dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}),$$
$$\dashv S^{x}(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}, {'x}),$$
$$\dashv S^{x}(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}, {'z}), \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\vdash S^{v}(\mathrm{P}, S^{z}(f, {'z})),\ \dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}),$$
$$\dashv S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x},\ \dashv S^{x}(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}, {'z}), \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\vdash S^{v}(\mathrm{P}, f),\ \dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}),$$
$$\dashv S^{v}(\mathrm{P}, f),\ \dashv f = {'x}, \ldots \ \boxtimes$$

$$\vdash {'x} = f,\ \dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x})$$

$$\downarrow$$

$$\vdash {'x} = f,\ \vdash f = {'x},\ \dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}),$$
$$\dashv S^{x}(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}, {'x}),$$
$$\dashv S^{x}(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}, {'v}), \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\vdash {'x} = f,\ \vdash f = {'x},$$
$$\dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}),$$
$$\dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}), \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\vdash {'x} = f,\ \vdash f = {'x},$$
$$\dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x}),$$
$$\dashv \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f),\ \dashv f = {'x}, \ldots \ \boxtimes$$

Отримали замкнене секвенційне дерево, тому справджується $\exists x S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee {'x} = f \models \exists x(S^{v}(\mathrm{P}, f) \vee f = {'x})$.

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть допоміжні секвенційні форми *FQEC*-числень.

2. Наведіть секвенційні форми *FQEC*-числень, пов'язані з еквівалентними перетвореннями.

3. Наведіть секвенційні форми *FQEC*-числень, пов'язані з елімінацією кванторів.

4. Наведіть секвенційні форми *FQEC*-числень, пов'язані з рівністю.

5. Опишіть побудову виведення у *FQEC*-численні для заданої зліченної секвенції.

6. Сформулюйте теореми коректності та повноти для *FQEC*-числень.

7. Сформулюйте теорему про побудову контрмоделі для *FQEC*-числень.

8. Опишіть побудову контрмоделі у *FQEC*-численні.

Вправи

1. Запишіть похідні секвенційні форми *FQEC*-числень для $\rightarrow$ та &.

2. Запишіть похідні секвенційні форми *FQEC*-числень для $\forall$.

3. Обґрунтуйте секвенційні форми елімінації кванторів у *FQEC*-численнях.

4. Обґрунтуйте секвенційні форми заміни рівних у *FQEC*-численнях.

5. Дайте визначення модельної множини для випадку *FQEC*-числень.

6. Доведіть теорему про побудову контрмоделі для *FQEC*-числень.

7. Побудуйте у *FQEC*-численні виведення чи доведіть його відсутність (указавши контрмодель) для таких формул:

1) $\forall x S^u(\mathrm{P}, S^u(f, {}'x)) \rightarrow \exists x S^u(\mathrm{P}, {}'x)$;
2) $\forall x (S^u(f, f) = {}'x) \rightarrow \forall x \exists y (S^u(f, {}'y) = {}'x)$;
3) $\exists x (S^v(\mathrm{P}, f) \vee f = {}'x) \rightarrow \exists x S^v(\mathrm{P}, f) \vee {}'x = f$;
4) $\forall x (S^v(\mathrm{P}, f) \,\&\, g = {}'x) \rightarrow \forall x S^v(\mathrm{P}, f) \,\&\, {}'x = g$;
5) $\forall x S^v(\mathrm{P}, f) \,\&\, g = {}'x \rightarrow \forall x (S^v(\mathrm{P}, f) \,\&\, {}'x = g)$;
6) $\exists x (S^v(\mathrm{P}, f) \rightarrow g = f) \rightarrow \exists x S^v(\mathrm{P}, f) \rightarrow f = g$;
7) $\exists x S^v(\mathrm{P}, f) \rightarrow g = f \rightarrow \exists x (S^v(\mathrm{P}, f) \rightarrow f = g)$.

7. ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Характерним для програмування і моделювання є використання часткових, необов'язково однозначних, відображень над складними даними. Тому постає проблема дослідження програмно-орієнтованих логік часткових предикатів, які можуть бути неоднозначними (недетермінованими).

Класична логіка – це логіка тотальних однозначних X-арних предикатів.

Неокласичні логіки – це логіки часткових однозначних еквітонних квазіарних предикатів.

У цьому розділі розглянемо більш загальні логіки *часткових неоднозначних* квазіарних предикатів – квазіарних предикатів реляційного типу.

7.1. Квазіарні предикати реляційного типу та їхні семантики

Під V-A-квазіарним предикатом розумітимемо часткову неоднозначну функцію вигляду $Q : {}^{V}A \to \{T, F\}$.

Часткові неоднозначні V-A-квазіарні предикати далі трактуємо як відповідності (відношення) між ${}^{V}A$ та $\{T, F\}$, тому назвемо їх *предикатами реляційного типу*, або R-предикатами. Вони формалізують найпростіше уточнення поняття часткового неоднозначного квазіарного предиката. Узагальненням R-предикатів є GND-предикати – загальні недетерміновані квазіарні предикати. GND-предикати досліджено, зокрема, у [13].

Клас V-A-квазіарних предикатів реляційного типу позначимо $PrR^{V\text{–}A}$.

Таким чином, клас квазіарних предикатів $Pr^{V\text{–}A}$ (див. розд. 3 та підрозд. 4.5) ми конкретизуємо як клас квазіарних R-предикатів $PrR^{V\text{–}A}$.

Позначаємо $Q[d]$ множину значень, які R-предикат Q може прийняти на $d \in {}^{V}A$.

Маємо $Q[d] \subseteq \{T, F\}$, тому $Q[d]$ може бути одним із $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$.

Кожний V-A-квазіарний R-предикат Q однозначно задається двома множинами – *областю істинності* (T-область) та *областю хибності* (F-область):

$$T(Q) = \{d \in {}^{V}A \mid T \in Q[d]\};$$

$$F(Q) = \{d \in {}^{V}A \mid F \in Q[d]\}.$$

Розглянемо різновиди R-предикатів.

V-A-квазіарний R-предикат Q:

– однозначний, якщо $T(Q) \cap F(Q) = \varnothing$;

– тотальний, якщо $T(Q) \cup F(Q) = {}^{V}A$;

– неспростовний (частково істинний), якщо $F(Q) = \varnothing$;

– виконуваний, якщо $T(Q) \neq \varnothing$;

– тотально істинний, якщо $T(Q) = {}^{V}A$;

– тотально хибний, якщо $F(Q) = {}^{V}A$;

– тотожно істинний, якщо $T(Q) = {}^{V}A$ та $F(Q) = \varnothing$ (позн. T);

– тотожно хибний, якщо $T(Q) = \varnothing$ та $F(Q) = {}^{V}A$ (позн. F);

– всюди невизначений, якщо $T(Q) = F(Q) = \varnothing$ (позн. $\perp$);

– тотально амбівалентний, якщо $T(Q) = F(Q) = {}^{V}A$ (позн. Υ).

Маємо такі константні R-предикати: $\perp$, T, F, Υ.

Часткові однозначні R-предикати назвемо P-предикатами.

Клас P-предикатів далі позначатимемо PrP^{V-A}.

Для P-предикатів замість $Q(d) = \{T\}$ та $Q(d) = \{F\}$ звично пишемо $Q(d) = T$ та $Q(d) = F$.

Області істинності й хибності P-предикатів можна подати традиційно:

$$T(Q) = \{d \mid Q(d) = T\},\ F(Q) = \{d \mid Q(d) = F\}.$$

Тотальні R-предикати назвемо T-предикатами.

Клас T-предикатів далі позначатимемо PrT^{V-A}.

Тотальні однозначні R-предикати назвемо TS-предикатами. Клас TS-предикатів позначатимемо PrT^{V-A}, цей клас суттєво вироджений.

Предметне ім'я $x \in V$ неістотне для R-предиката Q, якщо

$$d\|_{-x} = h\|_{-x} \Rightarrow Q[d] = Q[h].$$

R-предикат Q *монотонний*, якщо $d \subseteq d' \Rightarrow Q[d] \subseteq Q[d']$.

R-предикат Q *антитонний*, якщо $d \subseteq d' \Rightarrow Q[d] \supseteq Q[d']$.

Окремим випадком монотонності є еквітонність – збереження прийнятого значення при розширенні даних.

Для однозначних предикатів монотонність стає еквітонністю.

P-предикат Q *еквітонний*, якщо

$$Q(d)\downarrow \text{ та } d \subseteq d' \Rightarrow Q(d')\downarrow = Q(d).$$

Монотонні R-предикати назвемо RM-предикатами.

Еквітонні P-предикати назвемо PE-предикатами.

Антитонні R-предикати назвемо RA-предикатами.

Антитонні T-предикати назвемо TA-предикатами.

Класи RM-предикатів, RA-предикатів, TA-предикатів, PE-предикатів далі відповідно позначатимемо $PrRM^{V-A}$, $PrRA^{V-A}$, $PrPE^{V-A}$, $PrTA^{V-A}$.

Монотонність предиката означає, що набуте ним значення зберігається при розширенні даних. Для P-предикатів це може трактуватися як збереження інформативності предиката при збільшенні інформативності вхідних даних. Для T-предикатів ситуація протилежна: при розширенні вхідних даних інформативність може тільки зменшуватися.

Отже, поняття монотонності малозмістовне для T-предикатів. Для них адекватним є дуальне поняття антитонності. Для T-предикатів антитонність означає, що інформативність предиката не зменшується при збільшенні інформативності вхідних даних.

Якщо Q антитонний, то $Q[\varnothing]$ складається з усіх значень, яких предикат може набувати на ${}^{V}A$, тобто $Q[\varnothing] = E_Q$. У класі P-предикатів антитонними можуть бути лише майже константні предикати: $Q(d) \cong T$ для всіх $d \in {}^{V}A$ або $Q(d) \cong F$ для всіх $d \in {}^{V}A$. Тому в класі однозначних предикатів поняття антитонності малозмістовне.

Константні предикати $\perp$, T, F, Υ є монотонними й антитонними.

Приклад 7.1.1. Розглянемо такі предикати.

$$P_1(d) = \begin{cases} \{F\}, \text{ якщо } x \in asn(d), \\ \{T\}, \text{ якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

$$P_2(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\in asn(d),\\ \{F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d).\end{cases}$$

$$P_3(d)=\begin{cases}\{F\}, \text{ якщо } x\in asn(d),\\ \varnothing, \text{ якщо } x\notin asn(d).\end{cases}$$

$$P_4(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\in asn(d),\\ \{T\}, \text{ якщо } x\notin asn(d).\end{cases}$$

$$P_5(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\in asn(d),\\ \varnothing, \text{ якщо } x\notin asn(d).\end{cases}$$

$$P_6(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\in asn(d),\\ \{F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d).\end{cases}$$

$$P_7(d)=\begin{cases}\{F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d),\\ \varnothing, \text{ якщо } x\in asn(d).\end{cases}$$

$$P_8(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d),\\ \{T\}, \text{ якщо } x\in asn(d).\end{cases}$$

$$P_9(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\notin asn(d),\\ \varnothing, \text{ якщо } x\in asn(d).\end{cases}$$

$$P_{10}(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d),\\ \{F\}, \text{ якщо } x\in asn(d).\end{cases}$$

P_1 та P_2 немонотонні (нееквітонні) й неантитонні тотальні однозначні, P_3 та P_5 монотонні (еквітонні) часткові однозначні, P_4 та P_6 монотонні тотальні неоднозначні, P_7 та P_9 антитонні часткові однозначні, P_8 та P_{10} антитонні тотальні неоднозначні.

R-предикат $\tilde{P}$ назвемо *дуальним* до R-предиката Q, якщо

$$T(\tilde{Q})=\overline{F(Q)} \text{ та } F(\tilde{Q})=\overline{T(Q)}.$$

Приклад 7.1.2. Предикати $\perp$ та Υ взаємно дуальні.

Приклад 7.1.3. Безпосередньо із визначень отримуємо:

1) $Q\in PrP^{V-A} \Rightarrow \tilde{Q}\in PrT^{V-A}$; $Q\in PrT^{V-A} \Rightarrow \tilde{Q}\in PrP^{V-A}$;

$Q\in PrTS^{V-A} \Rightarrow \tilde{Q}\in PrTS^{V-A}$;

2) Q монотонний $\Rightarrow$ $\tilde{Q}$ антитонний;

Q антитонний $\Rightarrow$ $\tilde{Q}$ монотонний.

Задамо відображення дуалізації $\delta: PrR^{V\text{–}A} \to PrR^{V\text{–}A}$ таким чином:

$\delta(Q) = \tilde{Q}$ для всіх $Q \in PrR^{V\text{–}A}$.

Маємо $\delta(\delta(Q) = Q$ для кожного $Q \in PrR^{V\text{–}A}$.

Приклад 7.1.4. $\delta(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$, $\delta(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$, $\delta(\perp) = \Upsilon$, $\delta(\Upsilon) = \perp$;
$\delta(PrP^{V\text{–}A}) = PrT^{V\text{–}A}$, $\delta(PrT^{V\text{–}A}) = PrP^{V\text{–}A}$, $\delta(PrTS^{V\text{–}A}) = PrTS^{V\text{–}A}$;
$\delta(PrPE^{V\text{–}A}) = PrTA^{V\text{–}A}$, $\delta(PrTA^{V\text{–}A}) = PrPE^{V\text{–}A}$,
$\delta(PrRM^{V\text{–}A}) = PrRA^{V\text{–}A}$, $\delta(PrRA^{V\text{–}A}) = PrRM^{V\text{–}A}$.

Пропозиційні композиції R-предикатів – логічні зв'язки – визначаються через області істинності й хибності відповідних предикатів так, як для випадку P-предикатів (див. розділ 2).

Композиція реномінації у випадку R-предикатів задається традиційно, через операцію реномінації:

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)(d) = Q(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)) \text{ для кожного } d \in {}^{V}\!A.$$

Композицію квантифікації $\exists x$ у випадку R-предикатів задаємо через області істинності та хибності предиката $\exists xQ$:

$$T(\exists xQ) = \{d \in {}^{V}\!A \mid T \in Q(d\nabla x \mapsto a) \text{ для деякого } a \in A\};$$

$$F(\exists xQ) = \{d \in {}^{V}\!A \mid F \in Q(d\nabla x \mapsto a) \text{ для всіх } a \in A\}.$$

Композиція квантифікації $\forall x$ є похідною, вона задається умовою $\forall xQ = \neg\exists x\neg Q$.

Приклад 7.1.5. Спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати-індикатори Ez – визначають наявність у даних компоненти з відповідним $z \in V$. Ці предикати використовують для опису властивостей елімінації кванторів (див. [12, 43]).

Предикати-індикатори Ez задаються таким чином:

$$T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d \mid z \in asn(d)\};$$

$$F(Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d \mid z \notin asn(d)\}.$$

Предикати Ez не є монотонними і не є антитонними.

Кожне $x \in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для Ez.

Приклад 7.1.6. Властивості R-предикатів, пов'язані з елімінацією кванторів:

T∃v) $T(\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \cap T(Ey) \subseteq T(\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP))$,

зокрема $T(\mathrm{R}_{y}^{x}(P)) \cap T(Ey) \subseteq T(\exists xP)$;

F∃v) $F(\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)) \cap T(Ey) \subseteq F(\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P))$,

зокрема $F(\exists xP) \cap T(Ey) \subseteq F(\mathrm{R}_{y}^{x}(P))$.

Композиції $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ – це базові композиції чистих першопорядкових логік R-предикатів.

Теорема 7.1.1. Композиції $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ зберігають однозначність, тотальність, монотонність, антитонність квазіарних R-предикатів.

Наслідок 7.1.1. Класи $PrP^{V\text{–}A}$, $PrT^{V\text{–}A}$, $PrTS^{V\text{–}A}$, $PrRM^{V\text{–}A}$, $PrRA^{V\text{–}A}$, $PrPE^{V\text{–}A}$, $PrTA^{V\text{–}A}$ замкнені щодо композицій $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$, &, $\leftrightarrow$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \forall x$.

Композиційну алгебру вигляду $AQR^{V\text{–}A} = (PrR^{V\text{–}A}, CQ)$, де $CQ = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ – множина базових композицій, назвемо чистою першопорядковою алгеброю R-предикатів. Фактично це алгебра $AQ^{V\text{–}A}$ (див. розділ 3), де $Pr^{V\text{–}A}$ конкретизовано як $PrR^{V\text{–}A}$.

Приклад 7.1.6. Згідно з наслідком 7.1.1 можна виділити такі підалгебри алгебри $AQR^{V\text{–}A}$:

– $AQP^{V\text{–}A} = (PrP^{V\text{–}A}, CQ)$ – алгебра P-предикатів;
– $AQT^{V\text{–}A} = (PrT^{V\text{–}A}, CQ)$ – алгебра T-предикатів;
– $AQTS^{V\text{–}A} = (PrTS^{V\text{–}A}, CQ)$ – алгебра TS-предикатів;
– $AQRM^{V\text{–}A} = (PrRM^{V\text{–}A}, CQ)$ – алгебра RM-предикатів;
– $AQRA^{V\text{–}A} = (PrRA^{V\text{–}A}, CQ)$ – алгебра RA-предикатів;
– $AQPE^{V\text{–}A} = (PrPE^{V\text{–}A}, CQ)$ – алгебра PE-предикатів;
– $AQTA^{V\text{–}A} = (PrTA^{V\text{–}A}, CQ)$ – алгебра TA-предикатів.

Приклад 7.1.7. Сингулярні композиційні алгебри, носії яких складаються із константних елементів:

$$\perp^{V\text{-}A} = (\{\perp\}, CQ\}, \Upsilon^{V\text{-}A} = (\{\Upsilon\}, CQ\}, \mathrm{B}^{V\text{-}A} = (\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}, CQ\};$$

$\mathrm{BP}^{V\text{-}A} = (\{\perp, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}, CQ\}$, $\mathrm{BT}^{V\text{-}A} = (\{\Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}, CQ\}$,
$\mathrm{BL}^{V\text{-}A} = (\{\perp, \Upsilon, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}, CQ\}$.

Те, що алгебра $\aleph$ є підалгеброю алгебри $\Re$, позначимо $\aleph \prec \Re$.

Приклад 7.1.8. Маємо такі співвідношення:
$\perp^{V\text{-}A} \prec \mathrm{BP}^{V\text{-}A}$; $\Upsilon^{V\text{-}A} \prec \mathrm{BT}^{V\text{-}A}$;

$\mathrm{B}^{V\text{-}A} \prec \mathrm{BL}^{V\text{-}A}$; $\mathrm{B}^{V\text{-}A} \prec \mathrm{BT}^{V\text{-}A}$; $\mathrm{BP}^{V\text{-}A} \prec \mathrm{BL}^{V\text{-}A}$; $\mathrm{BT}^{V\text{-}A} \prec \mathrm{BL}^{V\text{-}A}$;

$AQTS^{V\text{–}A} \prec AQP^{V\text{–}A}$ та $AQTS^{V\text{–}A} \prec AQT^{V\text{–}A}$;

$AQP^{V\text{–}A} \prec AQR^{V\text{–}A}$ та $AQT^{V\text{–}A} \prec AQR^{V\text{–}A}$;

$AQPE^{V\text{–}A} \prec AQP^{V\text{–}A}$ та $AQPE^{V\text{–}A} \prec AQRM^{V\text{–}A}$;

$AQTA^{V\text{–}A} \prec AQT^{V\text{–}A}$ та $AQTA^{V\text{–}A} \prec AQRA^{V\text{–}A}$;

$AQRM^{V\text{–}A} \prec AQR^{V\text{–}A}$ та $AQRA^{V\text{–}A} \prec AQR^{V\text{–}A}$.

Нехай δ – відображення дуалізації.

Алгебри (Pr_1, CQ) і (Pr_2, CQ) дуальні, якщо $\delta(\mathrm{Pr}_1) = \mathrm{Pr}_2$ та $\delta(\mathrm{Pr}_2) = \mathrm{Pr}_1$.

Приклад 7.1.9. Маємо такі пари дуальних алгебр:
$\perp^{V\text{-}A}$ та $\Upsilon^{V\text{-}A}$, $\mathrm{BP}^{V\text{-}A}$ та $\mathrm{BT}^{V\text{-}A}$;
$AQP^{V\text{–}A}$ та $AQT^{V\text{–}A}$; $AQPE^{V\text{–}A}$ та $AQTA^{V\text{–}A}$, $AQRM^{V\text{–}A}$та $AQRA^{V\text{–}A}$.
Алгебри $\mathrm{B}^{V\text{-}A}$, $\mathrm{BL}^{V\text{-}A}$, $AQTS^{V\text{–}A}$, $AQR^{V\text{–}A}$ автодуальні.

У випадку R-предикатів властивості пропозиційних композицій загалом аналогічні властивостям відповідних класичних логічних зв’язок (див. розділ 2). Те саме стосується більшості властивостей кванторів. Водночас для квазіарних предикатів уже неправильні деякі пов'язані із кванторами закони класичної логіки (див. підрозділ 3.2). Основні властивості композицій реномінації описано в підрозділі 3.2 (див. теореми 3.2.1 та 3.2.7).

Для опису властивостей квазіарних R-предикатів на кванторному рівні використовуватимемо описану в підрозділі 4.5 мову ЧКНЛ. Така мова фактично визначається побудовою композиційної алгебри $AQR^{V\text{–}A}$. У підрозділі 4.5 описано інтерпретацію цієї мови на АС із доданою сигнатурою вигляду $((^{V}A, PrPE^{V\text{–}A}), \Sigma, I)$. У випадку ЧКНЛ квазіарних R-предикатів клас інтерпретацій розширимо до АС із доданою сигнатурою вигляду $(({}^{V}A, PrR^{V\text{–}A}), \Sigma, I)$, які теж скорочено позначатимемо (A, I).

Виділення підалгебр квазіарних предикатів індукує виділення відповідних класів інтерпретацій. Ми говоримо про загальний клас *R*-інтерпретацій та підкласи *P*-, *T*-, *TS*-, *PE*-, *TA*-, *RM*- та *RA*-інтерпретацій.

Такі класи інтерпретацій називають *семантиками*.

Зазначені семантики будемо відповідно позначати

$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{TS}$, $\boldsymbol{PE}$, $\boldsymbol{TA}$, $\boldsymbol{RM}$, $\boldsymbol{RA}$.

Теорема 7.1.1. Для семантик маємо співвідношення

$\boldsymbol{TS} \subset \boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{TS} \subset \boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{R}$,

$\boldsymbol{PE} \subset \boldsymbol{RM} \subset \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{TA} \subset \boldsymbol{RA} \subset \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{PE} \subset \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{TA} \subset \boldsymbol{T}$.

Логіки $*$-предикатів будемо називати логіками з $*$-семантикою (тут $*$ – одне з *R*, *P*, *T*, *TS*, *PE*, *TA*, *RM*, *RA*).

Зауважимо, що ЧНКЛ – це ЧКНЛ із *PE*-семантикою, такі логіки розглянуто в підрозділі 4.5.

Відображення дуалізації продовжимо на класи інтерпретацій.

Інтерпретацію $\delta(\boldsymbol{J}) = (A, I_\delta)$ назвемо дуальною до інтерпретації $\boldsymbol{J} = (A, I)$, якщо для кожного $p \in Ps$ маємо

$$T(p_{\delta(J)}) = \overline{F(p_J)} \text{ та } F(p_{\delta(J)}) = \overline{T(p_J)}.$$

У цьому випадку інтерпретація $\boldsymbol{J}$ дуальна до $\delta(\boldsymbol{J})$:

$$T(p_J) = \overline{F(p_{\delta(J)})} \text{ та } F(p_J) = \overline{T(p_{\delta(J)})}.$$

Теорема 7.1.2. Інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та $\boldsymbol{\vartheta}$ дуальні $\Rightarrow$ для всіх $\Phi \in Fr$ маємо $T(\Phi_J) = \overline{F(\Phi_\vartheta)}$ та $F(\Phi_\vartheta) = \overline{T(\Phi_J)}$.

Якщо $\boldsymbol{J}$ та $\boldsymbol{G}$ дуальні, то

Φ_J монотонний $\Leftrightarrow$ Φ_G антитонний;

Φ_G антитонний $\Leftrightarrow$ Φ_J монотонний.

Виділення дуальних пар предикатних алгебр індукує виділення дуальних семантик.

Приклад 7.1.10. Маємо такі дуальні пари: $\boldsymbol{P}$ та $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{PE}$ та $\boldsymbol{TA}$, $\boldsymbol{RM}$ та $\boldsymbol{RA}$.

Семантики $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{TS}$ автодуальні.

Формула Φ неспростовна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, або $\boldsymbol{J}$-неспростовна (позн. $\boldsymbol{J} |= \Phi$), якщо предикат Φ_J неспростовний.

Φ неспростовна у класі інтерпретацій $\boldsymbol{K}$ (позн. $^{K}|\!=\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}\,|\!=\Phi$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{K}$.

Φ виконувана при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, або $\boldsymbol{J}$-виконувана, якщо Φ_J – виконуваний предикат.

Формула Φ виконувана у класі інтерпретацій $\boldsymbol{K}$, якщо Φ $\boldsymbol{J}$-виконувана за деякої $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{K}$.

Приклад 7.1.11. Кожна формула виконувана в $\boldsymbol{T}$ та виконувана в $\boldsymbol{R}$ (задамо інтерпретацію алгеброю $\Upsilon^{V\text{-}A}$). Тому поняття виконуваної формули змістовне лише для P-інтерпретацій.

Формула Φ тотально істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J}\,|\!\equiv\Phi$), якщо Φ_J – тотально істинний предикат.

Φ тотально істинна у класі інтерпретацій $\boldsymbol{K}$ (позн. $^{K}|\!\equiv\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}\,|\!\equiv\Phi$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{K}$.

Формула Φ тотожно істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $^{K}|\!=_{id}\Phi$), якщо $\Phi_J = T$.

Формула Φ тотожно істинна у класі інтерпретацій $\boldsymbol{K}$, якщо $^{K}|\!=_{id}\Phi$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{K}$.

Подібним чином даємо визначення тотально хибної при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та тотально хибної в $\boldsymbol{K}$ формули; тотожно хибної при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та тотожно хибної в $\boldsymbol{K}$ формули.

Теорема 7.1.3. $\{\Phi\,|\,^{P}|\!=\Phi\} = \{\Phi\,|\,^{T}|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi\,|\,^{TS}|\!=_{id}\Phi\} =$
$= \{\Phi\,|\,^{TS}|\!=\Phi\} = \{\Phi\,|\,^{TS}|\!\equiv\Phi\};$
$\{\Phi\,|\,^{R}|\!=\Phi\} = \{\Phi\,|\,^{R}|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi\,|\,^{R}|\!=_{id}\Phi\} = \Phi\,|\,^{P}|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi\,|\,^{P}|\!=_{id}\Phi\} =$
$= \{\Phi\,|\,^{T}|\!=\Phi\} = \{\Phi\,|\,^{T}|\!=_{id}\Phi\} = \varnothing.$

Поняття тавтології для ЧКНЛ R-предикатів вводимо аналогічно випадку ЧНКЛ (див. підрозділ 4.5).

Запитання для самоконтролю

1. Опишіть різновиди R-предикатів.
2. Дайте визначення монотонного R-предиката.
3. Дайте визначення антитонного R-предиката.
4. Дайте визначення предиката, дуального до даного R-предиката.

5. Що таке відображення дуалізації?

6. Дайте визначення предиката-індикатора *Ez.*

7. Наведіть властивості *R*-предикатів, пов'язані з елімінацією кванторів.

8. Що таке дуальні алгебри?

9 Наведіть приклади підалгебр алгебри AQR^{V-A} та опишіть співвідношення між цими підалгебрами.

10. Які ви знаєте класи інтерпретацій *R*-предикатів (семантики)?

11. Опишіть співвідношення між семантиками ***R***, ***P***, ***T***, ***TS***, ***PE***, ***TA***, ***RM***, ***RA***.

12. Що таке дуальні інтерпретації?

13. Що таке дуальні семантики? Наведіть приклади.

14. Дайте визначення формули:

– неспростовної;
– виконуваної;
– тотально істинної;
– тотожно істинної.

Вправи

1. Доведіть: $^{P}|\!=\Phi \Leftrightarrow \neg\Phi$ невиконувана в ***P***.

2. Доведіть наведені вище співвідношення між семантиками (теорема 7.1.1).

3. Доведіть: якщо інтерпретації ***J*** та $\boldsymbol{\vartheta}$ дуальні, то для всіх $\Phi \in Fr$ маємо $T(\Phi_J) = \overline{F(\Phi_\vartheta)}$ та $F(\Phi_\vartheta) = \overline{T(\Phi_J)}$ (теорема 7.1.2).

4. Доведіть: Φ тавтологія $\Rightarrow$ $^{TS}|\!=_{id}\Phi$.

5. Доведіть теорему 7.1.3.

7.2. Відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів

На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів можна ввести низку відношень на множині формул мови ЧКНЛ.

Спочатку введемо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій $\boldsymbol{J}$:

1) істиннісний, або T-наслідок: $\Phi\ {}_J|\!\!=_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J)$;

2) хибнісний, або F-наслідок: $\Phi\ {}_J|\!\!=_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)$;

3) сильний, або TF-наслідок:

$\Phi\ {}_J|\!\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J)$ та $F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)$;

4) неспростовнісний, або IR-наслідок:

$\Phi\ {}_J|\!\!=_{IR} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing$;

5) дуальний до IR-наслідку, або DI-наслідок:

$\Phi\ {}_J|\!\!=_{DI} \Psi \Leftrightarrow F(\Phi_J) \cup T(\Psi_J) = {}^V\!A$.

Відповідні відношення логічного наслідку в семантиці α визначатимемо за схемою

$\Phi\ {}^{\alpha}|\!\!=_* \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J|\!\!=_* \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \alpha$.

Розглядаючи відношення логічного наслідку в семантиках $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{TS}$, загалом отримуємо 20 відношень.

Приклад 7.2.1. Нехай для семантик α та β маємо $\alpha \subseteq \beta$. Тоді ${}^{\beta}|\!\!=_* \subseteq {}^{\alpha}|\!\!=_*$

Справді, нехай $\Phi\ {}^{\beta}|\!\!=_* \Psi$, тоді $\Phi\ {}_J|\!\!=_* \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \beta$. Проте $\alpha \subseteq \beta$, тому $\Phi\ {}_J|\!\!=_* \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \alpha$. Звідси $\Phi\ {}^{\alpha}|\!\!=_* \Psi$. Отже, маємо ${}^{\beta}|\!\!=_* \subseteq {}^{\alpha}|\!\!=_*$.

Таким чином, при розширенні семантики відношення логічного наслідку звужується.

У випадках класичної логіки та логіки TS-предикатів усі наведені відношення логічного наслідку збігаються і стають єдиним відношенням, яке позначимо ${}^{TS}|\!\!=$:

Теорема 7.2.1. Маємо такі властивості відношень логічного наслідку:

1) ${}^P|\!\!=_{DI} = {}^T|\!\!=_{IR} = {}^R|\!\!=_{IR} = {}^R|\!\!=_{DI} = \varnothing$;

2) ${}^P|\!\!=_T = {}^T|\!\!=_F$; ${}^P|\!\!=_F = {}^T|\!\!=_T$; ${}^R|\!\!=_T = {}^R|\!\!=_F = {}^R|\!\!=_{TF}$; ${}^P|\!\!=_{IR} = {}^T|\!\!=_{DI}$; ${}^P|\!\!=_{TF} = {}^T|\!\!=_{TF}$;

3) ${}^P|\!\!=_{IR} = {}^T|\!\!=_{DI} = {}^{TS}|\!\!=$.

Це дає нам п'ять різних невироджених відношень:

${}^P|\!\!=_{IR}$, ${}^P|\!\!=_T$, ${}^P|\!\!=_F$, ${}^P|\!\!=_{TF}$, ${}^R|\!\!=_{TF}$.

Теорема 7.2.2. Маємо такі співвідношення між відношеннями логічного наслідку (замість символу $\subset$ вживаємо стрілку $\to$):

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & {}^{P}|\!=_{T} & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
{}^{R}|\!=_{TF} & \to\ {}^{P}|\!=_{TF} & & & & {}^{P}|\!=_{IR} & \to\ {}^{PE}|\!=_{IR} \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & {}^{P}|\!=_{F} & & &
\end{array}
$$

Тут ${}^{PE}|\!=_{IR}$ – розглянуте раніше відношення неспростовнісного логічного наслідку для однозначних еквітонних предикатів.

Приклад 7.2.2. Нехай $A\in \boldsymbol{P}$, $p, q, s\in Ps$. Задамо p_A як T, q_A як $\perp$, s_A як F. Тоді $p\ {}_{A}|\!=_{IR}\, q$, $q\ {}_{A}|\!=_{IR}\, s$, однак $p\ {}_{A}|\!\neq_{IR}\, s$. Таким чином, відношення наслідку ${}_{A}|\!=_{IR}$ нетранзитивне.

Проте для відношення *логічного* наслідку ${}^{P}|\!=_{IR}$ ситуація нормалізується:

Теорема 7.2.3. Відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$ транзитивне.

Водночас транзитивність відношень ${}_{J}|\!=_{T}$, ${}_{J}|\!=_{F}$, ${}_{J}|\!=_{TF}$ та ${}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{F}$, ${}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{R}|\!=_{TF}$ безпосередньо випливає із означень.

Приклад 7.2.3. $\Phi\&\neg\Phi\ |\!=_{T}\Psi$.

Для кожної $A\in \boldsymbol{P}$ маємо $T(\Phi\&\neg\Phi_A) = T(\Phi_A)\cap F(\Phi_A) = \varnothing$, звідки $T(\Phi\&\neg\Phi_A) \subseteq T(\Psi_A)$, тому $\Phi\&\neg\Phi\ {}_{A}|\!=_{T}\Psi$ для довільних Φ, Ψ.

Приклад 7.2.4. $\Phi\ |\!=_{F}\Psi\vee\neg\Psi$.

Для кожної $A\in \boldsymbol{P}$ маємо $F(\Psi\vee\neg\Psi_A) = F(\Psi_A)\cap T(\Psi_A) = \varnothing$, звідки $F(\Psi\vee\neg\Psi_A) \subseteq F(\Phi_A)$, тому $\Phi\ {}_{A}|\!=_{F}\Psi\vee\neg\Psi$ для довільних Φ, Ψ.

Приклад 7.2.5. $\Phi\&\neg\Phi\ |\!\neq_{F}\Psi$.

Візьмемо Φ, Ψ, $A\in \boldsymbol{P}$ такі: $F(\Psi_A) \neq \varnothing$ та $T(\Phi_A) = F(\Phi_A) = \varnothing$, тобто $\Phi_A = \perp$; тоді неправильно $F(\Psi_A) \subseteq F(\Phi\&\neg\Phi_A)$, адже $F(\Phi\&\neg\Phi_A) = T(\Phi_A)\cup F(\Phi_A) = \varnothing$.

Приклад 7.2.6. $\Phi\ |\!\neq_{T}\Psi\vee\neg\Psi$

Візьмемо Φ, Ψ, $A\in \boldsymbol{P}$ такі: $T(\Phi_A) \neq \varnothing$ та $T(\Psi_A) = F(\Psi_A) = \varnothing$, тобто $\Psi_A = \perp$; тоді неправильно $T(\Phi_A) \subseteq T(\Psi\vee\neg\Psi_A)$, адже $T(\Psi\vee\neg\Psi_A) = T(\Psi_A)\cup F(\Psi_A) = \varnothing$.

Приклад 7.2.7. $\Phi\&\neg\Phi\,{}^{R}{\not\models}_{TF}\,\Psi\vee\neg\Psi$.

Візьмемо $A\in\boldsymbol{R}$ таку: $\Phi_A = \Upsilon$ та $\Psi_A = \bot$. Тоді маємо $T(\Phi_A)=F(\Phi_A)={}^{V}A$ та $T(\Psi_A)=F(\Psi_A)=\varnothing$, тому неправильно $T(\Phi\&\neg\Phi_A)\subseteq T(\Psi\vee\neg\Psi_A)$.

Приклад 7.2.8. $\Phi\&\neg\Phi\models_{TF}\Psi\vee\neg\Psi$.

Для кожної $A\in\boldsymbol{P}$ маємо $T(\Phi_A)\cap F(\Phi_A)=\varnothing$ та $F(\Psi_A)\cap T(\Psi_A)=\varnothing$, звідки $T(\Phi\&\neg\Phi_A)=\varnothing$ та $F(\Psi\vee\neg\Psi_A)=\varnothing$, тому $\Phi\&\neg\Phi\,{}_{A}{\models}_{T}\,\Psi\vee\neg\Psi$ та $\Phi\&\neg\Phi\,{}_{A}{\models}_{F}\,\Psi\vee\neg\Psi$.

Таким чином, для кожної $A\in\boldsymbol{P}$ маємо $\Phi\&\neg\Phi\,{}_{A}{\models}_{TF}\,\Psi\vee\neg\Psi$, тому $\Phi\&\neg\Phi\models_{TF}\Psi\vee\neg\Psi$.

Приклад 7.2.9. $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,{}^{R}{\not\models}_{TF}\,\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$.

Візьмемо $A\in\boldsymbol{R}$ таку: $\Phi_A = \Upsilon$ та $\Psi_A = \bot$. Тоді $T(\Phi_A)=F(\Phi_A)={}^{V}A$ та $T(\Psi_A)=F(\Psi_A)=\varnothing$; тому неправильно

$T(\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi))\subseteq T(\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi)$.

Приклад 7.2.10. $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\models_{TF}\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$.

Для кожної $A\in\boldsymbol{P}$ маємо $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,{}_{A}{\models}_{TF}\,\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$.

Теорема 7.2.4. Властивості контрапозиції для відношень наслідку:

1) $\Phi\,{}_{J}{\models}_{IR}\,\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\,{}_{J}{\models}_{IR}\,\neg\Phi$;

2) $\Phi\,{}_{J}{\models}_{TF}\,\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\,{}_{J}{\models}_{TF}\,\neg\Phi$;

3) $\Phi\,{}_{J}{\models}_{T}\,\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\,{}_{J}{\models}_{F}\,\neg\Phi$ та $\Phi\,{}_{J}{\models}_{F}\,\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\,{}_{J}{\models}_{T}\,\neg\Phi$.

Властивості контрапозиції для відношень логічного наслідку:

1) $\Phi\,{}^{P}{\models}_{IR}\,\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\,{}^{P}{\models}_{IR}\,\neg\Phi$;

2) $\Phi\,{}^{P}{\models}_{TF}\,\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\,{}^{P}{\models}_{TF}\,\neg\Phi$ та $\Phi\,{}^{R}{\models}_{TF}\,\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\,{}^{R}{\models}_{TF}\,\neg\Phi$;

5) $\Phi\,{}^{P}{\models}_{T}\,\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\,{}^{P}{\models}_{F}\,\neg\Phi$ та $\Phi\,{}^{P}{\models}_{F}\,\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\,{}^{P}{\models}_{T}\,\neg\Phi$.

Приклад 7.2.11. Неправильними є такі твердження:

1) $\Phi\,{}^{P}{\models}_{T}\,\Psi \Rightarrow \neg\Psi\,{}^{P}{\models}_{T}\,\neg\Phi$;

2) $\Phi\,{}^{P}{\models}_{F}\,\Psi \Rightarrow \neg\Psi\,{}^{P}{\models}_{F}\,\neg\Phi$.

Справді, візьмемо $p, q, s\in Ps$ та інтерпретацію $\boldsymbol{J}$:

$F(q_J)\not\subseteq T(p_J)\cup F(p_J)$, $T(q_J)\not\subseteq T(s_J)\cup F(s_J)$.

Тоді $\neg p\&p\,{}^{P}{\models}_{T}\,q$, $\neg q\,{}_{J}{\not\models}_{T}\,\neg p\vee p$, $q\,{}^{P}{\models}_{F}\,\neg s\vee s$, $\neg s\&s\,{}_{J}{\not\models}_{F}\,\neg q$.

Відношення логічного наслідку індукують відношення *логічної еквівалентності*.

Відношення еквівалентності при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ задаємо за такою схемою:

$$\Phi\ {}_{J}{\sim}_{*}\ \Psi, \text{ якщо } \Phi\ {}_{J}{\models}_{*}\ \Psi \text{ та } \Psi\ {}_{J}{\models}_{*}\ \Phi.$$

Приклад 7.2.12. Для відношення ${}_{J}{\sim}_{TF}$ маємо:

$$\Phi\ {}_{J}{\sim}_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J) \text{ та } F(\Phi_J) = F(\Psi_J).$$

Отже, $\Phi\ {}_{J}{\sim}_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi_J = \Psi_J$, тобто Φ_J та Ψ_J – це один і той самий предикат.

Відношення логічної еквівалентності ${}^{P}{\sim}_{IR}$, ${}^{P}{\sim}_{T}$, ${}^{P}{\sim}_{F}$, ${}^{P}{\sim}_{TF}$, ${}^{R}{\sim}_{TF}$ визначаємо за такою схемою:

$$\Phi\ {}^{\alpha}{\sim}_{*}\ \Psi, \text{ якщо } \Phi\ {}^{\alpha}{\models}_{*}\ \Psi \text{ та } \Psi\ {}^{\alpha}{\models}_{*}\ \Phi.$$

Приклад 7.2.13. $\Phi \vee \Psi \& \neg\Psi \sim_T \Phi$;

неправильно $\Phi \vee \Psi \& \neg\Psi \sim_F \Phi$.

Маємо $T((\Phi \vee \Psi \& \neg\Psi)_A) = T(\Phi_A) \cup (T(\Psi_A) \cap F(\Psi_A)) = T(\Phi_A)$ для кожної $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{P}$.

Водночас для $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{P}$ такої, що $T(\Psi_B) = F(\Psi_B) = \varnothing$, маємо $F((\Phi \vee \Psi \& \neg\Psi)_B) = F(\Phi_B) \cap (F(\Psi_B) \cup T(\Psi_B)) = \varnothing$.

Приклад 7.2.14. $\Phi \& (\Psi \vee \neg\Psi) \sim_F \Phi$;

неправильно $\Phi \& (\Psi \vee \neg\Psi) \sim_T \Phi$.

Маємо $F((\Phi \& (\Psi \vee \neg\Psi))_B) = F(\Phi_B) \cup (F(\Psi_B) \cap T(\Psi_B)) = F(\Phi_B)$ для кожної $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{P}$.

Водночас для $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{P}$ такої, що $T(\Psi_A) = F(\Psi_A) = \varnothing$, маємо $T((\Phi \& (\Psi \vee \neg\Psi)_A) = T(\Phi_A) \cap (T(\Psi_A) \cup F(\Psi_A)) = \varnothing$.

Теорема еквівалентності справджується для відношень ${}^{R}{\sim}_{TF}$, ${}^{P}{\sim}_{TF}$, ${}^{P}{\sim}_{IR}$:

Теорема 7.2.5. Нехай Ф' отримано з формули Ф заміною деяких входжень $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$.

Якщо $\Phi_1\ {}^{\alpha}{\sim}_{*}\ \Psi_1, ..., \Phi_n\ {}^{\alpha}{\sim}_{*}\ \Psi_n$, то $\Phi\ {}^{\alpha}{\sim}_{*}\ \Phi'$.

Використовуючи відношення логічної еквівалентності, можна описати основні семантичні властивості формул мови ЧКНЛ, пов'язані з реномінаціями та кванторами.

Приклад 7.2.15. Властивості формул мови ЧКНЛ, пов'язані з реномінаціями:

R) $R(\Phi) \sim_{TF} \Phi$ – елімінація тотожної реномінації;

RI) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$ – згортка тотожної пари імен;

RU) $R^{z,\bar{v}}_{y,\bar{x}}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$ за умови $z \in \nu(\Phi)$;

R¬) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \sim_{TF} \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$ – R¬-дистрибутивність;

R∨) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \sim_{TF} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)$ – R∨-дистрибутивність;

RR) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \sim_{TF} R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (\Phi)$ – згортка реномінацій.

Приклад 7.2.16. Традиційні властивості формул, пов'язані з кванторами:

Q1) $\exists x \exists y \Phi \sim_{TF} \exists y \exists x \Phi$ та $\forall x \forall y \Phi \sim_{TF} \forall y \forall x \Phi$;

Q2) $\neg \forall x \Phi \sim_{TF} \exists x \neg \Phi$ та $\neg \exists x \Phi \sim_{TF} \forall x \neg \Phi$;

Q3) $\exists x \Phi \sim_{TF} \forall x \exists x \Phi$, $\exists x \Phi \sim_{TF} \exists x \exists x \Phi$; $\forall x \Phi \sim_{TF} \forall x \forall x \Phi$, $\forall x \Phi \sim_{TF} \exists x \forall x \Phi$;

Q4) $\exists x \Phi \vee \exists x \Psi \sim_{TF} \exists x(\Phi \vee \Psi)$ та $\forall x \Phi \& \forall x \Psi \sim_{TF} \forall x(\Phi \& \Psi)$;

Q5) $\exists x(\Phi \& \Psi) \models_{TF} \exists x \Phi \& \exists x \Psi$,
проте не завжди $\exists x \Phi \& \exists x \Psi \models_{IR} \exists x(\Phi \& \Psi)$;

Q6) $\forall x \Phi \vee \forall x \Psi \models_{TF} \forall x(\Phi \vee \Psi)$,
проте не завжди $\forall x(\Phi \vee \Psi) \models_{IR} \forall x \Phi \vee \forall x \Psi$;

Q7) $\exists y \forall x \Phi \models_{TF} \forall x \exists y \Phi$, проте не завжди $\forall x \exists y \Phi \models_{IR} \exists y \forall x \Phi$;

Q8) не завжди $\Phi \models_{IR} \exists x \Phi$ та не завжди $\forall x \Phi \models_{IR} \Phi$.

Приклад 7.2.17. Властивості R∃-дистрибутивності:

R∃s) $R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(\exists x \Phi) \sim_{TF} \exists x R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(\Phi)$ за умови $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$ – проста R∃-дистрибутивність;

R∃) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y \Phi) \sim_{TF} \exists z R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{y}_{z} (\Phi)$ за умови $z \in V_T \setminus nm(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y \Phi))$ – R∃-дистрибутивність.

Поняття тавтології і тавтологічного наслідку для ЧКНЛ R-предикатів вводимо традиційно, аналогічно випадку ЧНКЛ (див. підрозд. 4.5).

Нормальні форми формул мови ЧКНЛ визначаємо аналогічно випадку ЧНКЛ, при цьому говоримо про *строгу* неістотність предметних імен. Теореми про зведення формул до нормальної форми переносяться на випадок ЧКНЛ. Те саме стосується поняття квазізамкненості формул.

Відношення логічного наслідку для множин формул. Введені вище відношення логічного наслідку поширимо на пари множин формул. Спочатку задамо відношення наслідку між двома множинами формул при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$.

Нехай $\Gamma\subseteq Fr$, $\Delta\subseteq Fr$. Введемо позначення

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_J) \text{ як } T^{\wedge}(\Gamma_J),\quad \bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_J) \text{ як } F^{\wedge}\Delta_J),$$

$$\bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_J) \text{ як } T^{\vee}(\Delta_J),\quad \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_J) \text{ як } F^{\vee}(\Gamma_J).$$

Δ є T-наслідком Γ при J (позн. $\Gamma\ {}_J{\models}_T\ \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J)\subseteq T^{\vee}(\Delta_J)$.

Δ є F-наслідком Γ при J (позн. $\Gamma\ {}_J{\models}_F\ \Delta$), якщо $F^{\wedge}(\Delta_J)\subseteq F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Δ є TF-наслідком Γ при J (позн. $\Gamma\ {}_J{\models}_{TF}\ \Delta$), якщо
$T^{\wedge}(\Gamma_J)\subseteq T^{\vee}(\Delta_J)$ та $F^{\wedge}(\Delta_J)\subseteq F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Δ є IR-наслідком Γ при J (позн. $\Gamma\ {}_J{\models}_{ID}\ \Delta$), якщо
$T^{\wedge}(\Gamma_J)\cap F^{\wedge}(\Delta_J)=\varnothing$.

Δ є DI-наслідком Γ при J (позн. $\Gamma\ {}_J{\models}_{DI}\ \Delta$), якщо
$F^{\vee}(\Gamma_J)\cup T^{\vee}(\Delta_J)={}^{V}\!A$.

Відношення *логічного* наслідку для множин формул у семантиці α визначатимемо за схемою:

$\Gamma\ {}^{\alpha}{\models}_*\ \Delta$, якщо $\Gamma\ {}_J{\models}_*\ \Delta$ для кожної $J\in\alpha$.

Теорема 7.2.6. Нехай інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та $\boldsymbol{\vartheta}$ дуальні. Тоді:
1) $\Gamma\ {}_J{\models}_{IR}\ \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}_{\vartheta}{\models}_{DI}\ \Delta$ та $\Gamma\ {}_J{\models}_{DI}\ \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}_{\vartheta}{\models}_{IR}\ \Delta$;
2) $\Gamma\ {}_J{\models}_T\ \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}_{\vartheta}{\models}_F\ \Delta$ та $\Gamma\ {}_J{\models}_F\ \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}_{\vartheta}{\models}_T\ \Delta$;
3) $\Gamma\ {}_J{\models}_{TF}\ \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}_{\vartheta}{\models}_{TF}\ \Delta$.

Співвідношення між цими відношеннями такі самі, як між відношеннями для пар формул:

$$\begin{tikzcd}
 & & {}^{P}{\models}_{T} \arrow[dr] & & \\
{}^{R}{\models}_{TF} \arrow[r] & {}^{P}{\models}_{TF} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {}^{P}{\models}_{IR} \arrow[r] & {}^{PE}{\models}_{IR} \\
 & & {}^{P}{\models}_{F} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Для $|=_{IR}$ можна переносити формули з лівої частини логічного наслідку у праву, і навпаки.

Теорема 7.2.7. $\Gamma\,|=_{IR}\Delta, \Phi \Leftrightarrow \neg\Phi, \Gamma\,|=_{IR}\Delta$ та
$\Gamma\,|=_{IR}\Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\,|=_{IR}\Delta$.

Водночас для $|=_{T}$, $|=_{F}$, $|=_{TF}$, ${}^{R}|=_{TF}$ такі перенесення робити не можна.

Приклад 7.2.15. Можливі такі ситуації:
1) $\neg\Phi, \Gamma\,|=_{T}\Delta$ та $\Gamma\,|\neq_{T}\Delta, \Phi$; $\Phi, \Gamma\,|=_{T}\Delta$ та $\Gamma\,|\neq_{T}\Delta, \neg\Phi$;
2) $\Gamma\,|=_{F}\Delta, \neg\Phi$ та $\Phi, \Gamma\,|\neq_{F}\Delta$; $\Gamma\,|=_{F}\Delta, \Phi$ та $\neg\Phi, \Gamma\,|\neq_{F}\Delta$.
Для п. 1 візьмемо $T(\Phi_A)=F(\Phi_A)=\varnothing$, $T(\Gamma_A)=\varnothing$, $T(\Delta_A)\neq\varnothing$.
Для п. 2 візьмемо $T(\Phi_A)=F(\Phi_A)=\varnothing$, $F(\Gamma_A)=\varnothing$, $F(\Delta_A)\neq\varnothing$.

Теорема 7.2.8. 1) $\neg\Phi, \Phi, \Gamma\,{}^{P}|=_{T}\Delta$;
2) $\Gamma\,{}^{P}|=_{F}\Delta, \neg\Psi, \Psi$;
3) $\neg\Phi, \Phi, \Gamma\,{}^{P}|=_{TF}\Delta, \neg\Psi, \Psi$.

Приклад 7.2.16. $\Gamma\,|\neq_{T}\Delta, \Phi, \neg\Phi$ та $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\,|\neq_{F}\Delta$.
Справді, візьмемо $T(\Phi_A)=F(\Phi_A)=\varnothing$, $T(\Delta_A)=\varnothing$, $F(\Delta_A)\neq\varnothing$, $T(\Gamma_A)\neq\varnothing$, $F(\Gamma_A)=\varnothing$.

Приклад 7.2.17. $\neg\Phi, \Phi, \Gamma\,{}^{R}|\neq_{TF}\Delta, \neg\Psi, \Psi$.
Візьмемо $T(\Phi_A)=F(\Phi_A)=T(\Gamma_A)={}^{V}A$, $T(\Delta_A)=T(\Psi_A)=F(\Psi_A)=\varnothing$; тоді $\neg\Phi, \Phi, \Gamma\,{}^{R}|\neq_{T}\Delta, \neg\Psi, \Psi$.

Розглянемо властивості відношень логічного наслідку для множин формул.

Надалі $|=$ – одне з відношень ${}^{P}|=_{IR}$, ${}^{P}|=_{T}$, ${}^{P}|=_{F}$, ${}^{P}|=_{TF}$, ${}^{R}|=_{TF}$.

Приклад 7.2.18. Для всіх зазначених відношень маємо монотонність:

якщо $\Gamma\subseteq\Lambda$ та $\Delta\subseteq\Sigma$, то $\Gamma\,|=\Delta \Rightarrow \Lambda\,|=\Sigma$.

Приклад 7.2.19. Властивості, які гарантують наявність логічного наслідку.

C) $\Phi, \Gamma\,|=\Delta, \Phi$ гарантовано для кожного з відношень.

Додатково гарантують наявність відповідного відношення логічного наслідку:

$CL)$ $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_{T} \Delta$;

$CR)$ $\Gamma\ {}^{P}|\!=_{F} \Delta, \Phi, \neg\Phi$;

$CLR)$ $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

Покажемо тут CLR. Для кожної $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{P}$ маємо $T(\Phi_A) \cap F(\Phi_A) = \varnothing$ та $F(\Psi_A) \cap T(\Psi_A) = \varnothing$, звідки:

$T(\Phi_A) \cap T(\neg\Phi_A) \cap T(\Gamma_A) = T(\Phi_A) \cap F(\Phi_A) \cap T(\Gamma_A) = \varnothing$, що дає $\Phi, \neg\Phi, \Gamma_A |\!=_{T} \Delta, \Psi, \neg\Psi$;

$F(\Psi_A) \cap F(\neg\Psi_A) \cap F(\Delta_A) = F(\Psi_A) \cap T(\Psi_A) \cap F(\Delta_A) = \varnothing$, що дає $\Phi, \neg\Phi, \Gamma_A |\!=_{F} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

Для кожної $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{P}$ маємо $\Phi, \neg\Phi, \Gamma_A |\!=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$, тому маємо $\Phi, \neg\Phi, \Gamma |\!=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

Приклад 7.2.20. Властивості декомпозиції формул:

$\neg\neg_{\mathrm{L}})$ $\neg\neg\Phi, \Gamma |\!= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |\!= \Delta$;

$\neg\neg_{\mathrm{R}})$ $\Gamma |\!= \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!= \Delta, \Phi$;

$\vee_{\mathrm{L}})$ $\Phi \vee \Psi, \Gamma |\!= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |\!= \Delta$ та $\Psi, \Gamma |\!= \Delta$;

$\vee_{\mathrm{R}})$ $\Gamma |\!= \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma |\!= \Delta, \Phi, \Psi$;

$\neg\vee_{\mathrm{L}})$ $\neg(\Phi \vee \Psi), \Gamma |\!= \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma |\!= \Delta$;

$\neg\vee_{\mathrm{R}})$ $\Gamma |\!= \Delta, \neg(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma |\!= \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma |\!= \Delta, \neg\Psi$.

Приклад 7.2.21. Для ${}^{P}|\!=_{IR}$ додатково справджуються:

$\neg_{\mathrm{L}})$ $\neg\Phi, \Gamma |\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} \Delta, \Phi$;

$\neg_{\mathrm{R}})$ $\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} \Delta$.

Проте для $|\!=_{T}$, $|\!=_{F}$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{TF}$ ці властивості неправильні (див. приклад 7.2.15).

Властивості спрощення та еквівалентних перетворень отримуємо на основі наведених вище властивостей R, RI, RU, RR, R¬, R∨, R∃s, R∃. Кожна така властивість R∗ продукує чотири відповідні властивості $\mathrm{R}{*}_{\mathrm{L}}$, $\mathrm{R}{*}_{\mathrm{R}}$, $\neg\mathrm{R}{*}_{\mathrm{L}}$, $\neg\mathrm{R}{*}_{\mathrm{R}}$ для відношення логічного наслідку, коли виділена формула чи її заперечення міститься у лівій чи правій частині цього відношення.

Приклад 7.2.22. Властивості, індуковані R$\vee$ та R$\exists$:

R$\vee_L$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi), \Gamma \models \Delta$;

R$\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)$;

$\neg$R$\vee_L$) $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)), \Gamma \models \Delta$;

$\neg$R$\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi))$.

R$\exists_L$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists z R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{y}_{z} (\Phi), \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in V_T \setminus nm(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi))$.

R$\exists_R$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists z R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{y}_{z} (\Phi)$ за умови $z \in V_T \setminus nm(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi))$.

$\neg$R$\exists_L$) $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\exists z R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{y}_{z} (\Phi), \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in V_T \setminus nm(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi))$.

$\neg$R$\exists_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\exists z R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{y}_{z} (\Phi)$ за умови $z \in V_T \setminus nm(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi))$.

Приклад 7.2.23. Властивості елімінації кванторів:

$\exists_L$) $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{x}_{z}(\Phi), Ez, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in V_T \setminus nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\neg\exists_R$) $\Gamma \models \neg\exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ez \models \neg R^{x}_{z}(\Phi), \Delta$ за умови $z \in V_T \setminus nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\exists$v$_R$) $\Gamma, Ey \models \exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ey \models \exists x\Phi, R^{x}_{y}(\Phi), \Delta$;

$\neg\exists$v$_L$) $\neg\exists x\Phi, Ey, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R^{x}_{y}(\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta$.

Наведені властивості є семантичною основою побудови числень секвенційного типу, які формалізують описані вище відношення логічного наслідку для множин формул (див., зокрема, [12, 43]).

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення відношень $_J|\!=_{IR}$, $_J|\!=_{T}$, $_J|\!=_{F}$, $_J|\!=_{TF}$, $_J|\!=_{TF}$.
2. Дайте визначення відношень $^P|\!=_{IR}$, $^P|\!=_{T}$, $^P|\!=_{F}$, $^P|\!=_{TF}$, $^R|\!=_{TF}$.

3. Чому серед 20 відношень логічного наслідку в семантиках $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{TS}$ є лише п’ять різних невироджених відношень: ${}^{P}|{=}_{IR}$, ${}^{P}|{=}_{T}$, ${}^{P}|{=}_{F}$, ${}^{P}|{=}_{TF}$, ${}^{R}|{=}_{TF}$?

4. Зобразіть співвідношення між введеними відношеннями логічного наслідку.

5. Чому відношення ${}_{A}|{=}_{IR}$ нетранзитивне?

6. Наведіть властивості контрапозиції для відношень наслідку та логічного наслідку.

7. Сформулюйте теорему еквівалентності; для яких відношень вона формулюється?

8. Наведіть властивості формул, пов'язані з реномінаціями.

9. Наведіть традиційні властивості формул, пов'язані із кванторами.

10. Наведіть властивості R$\exists$-дистрибутивності.

11. Дайте визначення відношень ${}_{J}|{=}_{IR}$, ${}_{J}|{=}_{T}$, ${}_{J}|{=}_{F}$, ${}_{J}|{=}_{TF}$, ${}_{J}|{=}_{TF}$ для пар множин формул.

12. Сформулюйте теорему 7.2.6 про дуальні інтерпретації.

13. Для яких відношень логічного наслідку можна переносити формули з лівої частини у праву і навпаки, а для яких таке перенесення робити не можна?

14. Наведіть властивості, які гарантують наявність відповідного відношення логічного наслідку.

15. Наведіть властивості декомпозиції формул для відношень ${}^{P}|{=}_{T}$, ${}^{P}|{=}_{F}$, ${}^{P}|{=}_{TF}$, ${}^{R}|{=}_{TF}$.

16. Наведіть властивості декомпозиції формул для відношення ${}^{P}|{=}_{IR}$.

17. Опишіть властивості спрощення та еквівалентних перетворень.

18. Наведіть властивості елімінації кванторів.

Вправи

1. Доведіть: ${}^{TS}|{=}_{TF} = {}^{TS}|{=}_{T} = {}^{TS}|{=}_{F} = {}^{TS}|{=}_{IR} = {}^{TS}|{=}_{DI} = {}^{TS}|{=}$.

2. Нехай інтерпретації $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ дуальні. Доведіть:

   1) $\Phi\ {}_{A}|{=}_{T}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|{=}_{F}\ \Psi$ та $\Phi\ {}_{A}|{=}_{F}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|{=}_{T}\ \Psi$;

   2) $\Phi\ {}_{A}|{=}_{IR}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|{=}_{DI}\ \Psi$ та $\Phi\ {}_{A}|{=}_{DI}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}\,|{=}_{IR}\ \Psi$;

   3) $\Phi\ {}_{A}|{=}_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|{=}_{TF}\ \Psi$.

3. Доведіть транзитивність відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$ (теорема 7.2.3).

4. Доведіть:

1) $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \,|\!=_T \Psi$; $\Phi \,|\!\neq_T \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

2) $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \,|\!\neq_F \Psi$; $\Phi \,|\!=_F \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

3) $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \,|\!=_{IR} \Psi$; $\Phi \,|\!=_{IR} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$.

5. Доведіть: $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi)\ {}_{A}|\!=_{TF} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$ для кожної $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{P}$.

6. Доведіть теорему 7.2.4.

7. Доведіть: $\Phi\ {}^{\alpha}\!\sim_* \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{J}\!\sim_* \Psi$ для кожної $J\in\alpha$.

8. Доведіть, навівши приклади, що для ${}^{P}\!\sim_T$ та ${}^{P}\!\sim_F$ теорема еквівалентності неправильна.

9. Доведіть:

1) $\Gamma \,|\!=_T \Delta, \Phi \Rightarrow \neg\Phi, \Gamma \,|\!=_T \Delta$;

2) $\Gamma \,|\!=_T \Delta, \neg\Phi \Rightarrow \Phi, \Gamma \,|\!=_T \Delta$;

3) $\Phi, \Gamma \,|\!=_F \Delta \Rightarrow \Gamma \,|\!=_F \Delta, \neg\Phi$;

4) $\neg\Phi, \Gamma \,|\!=_F \Delta \Rightarrow \Gamma \,|\!=_F \Delta, \Phi$.

10. Доведіть, що можливі такі ситуації:

1) $\neg\Phi, \Gamma \,|\!=_{TF} \Delta$ та $\Gamma \,|\!\neq_{TF} \Delta, \Phi$;

2) $\Gamma \,|\!=_{TF} \Delta, \neg\Phi$ та $\Phi, \Gamma \,|\!\neq_{TF} \Delta$;

3) $\neg\Phi, \Gamma\ {}^{R}|\!=_{TF} \Delta$ та $\Gamma\ {}^{R}|\!\neq_{TF} \Delta, \Phi$;

4) $\Gamma\ {}^{R}|\!=_{TF} \Delta, \neg\Phi$ та $\Phi, \Gamma\ {}^{R}|\!\neq_{TF} \Delta$.

11. Обґрунтуйте властивості, які гарантують наявність відповідного відношення логічного наслідку.

12. Сформулюйте у явному вигляді властивості, індуковані R, RI, RU, RR, R¬, R∃s.

13. Доведіть властивості елімінації кванторів.

8. НЕТРАДИЦІЙНІ ЛОГІКИ

Традиційна логіка предикатів є істинніснозначною із 2-елементною множиною $\{T, F\}$ істиннісних значень. Вона базується на такому фундаментальному принципі: *значення складного висловлення* (*предиката*) *залежить лише від значень його компонент, а не від їхнього сенсу.* Цей принцип формалізується у вигляді *принципу заміни еквівалентних* (*заміни рівних*). Це означає можливість заміни еквівалентних (рівних), незважаючи на контексти. Принцип може не виконуватись для логік інтенсіонального типу, зокрема модальних.

Розглянемо (у стилі Б. Рассела) приклад твердження, яке здається істинним:

Навіть першокласник Вовочка знає, що 1+1 = 2.

Маємо $\int_0^2 x dx = 2,$ проте заміна рівних дає не зовсім переконливе твердження:

Навіть першокласник Вовочка знає, що $1+1=\int_0^2 x dx.$

Принцип заміни еквівалентних засвідчує *екстенсіональний* характер традиційної логіки.

Важливими особливостями традиційної логіки є *рефлексивність*, *транзитивність* та *монотонність* логічного наслідку (аксіоматика логічного наслідку за Тарським). Водночас ці характерні особливості притаманні як класичній, так і низці некласичних логік.

Класична логіка розглядає ситуації як незмінні, вона перестає працювати, коли ми цікавимося не істинністю в конкретній ситуації, а розвитком понять. Вона мало що дає, коли треба формалізувати незнання. Виражаючись (див. [8]) дещо метафорично, класична логіка є логікою конкретного знання та віри, а некласична – це логіка побудови, зміни знання і сумніву. Це мотивує необхідність вивчення нетрадиційних, некласичних логік.

У цьому посібнику стисло розглянемо такі найпоширеніші типи нетрадиційних логік, як багатозначні, інтуїціоністські та модальні.

8.1. Багатозначні логіки

Традиційні логіки є двозначними в тому розумінні, що множина істиннісних значень двоелементна, її позначаємо як $\{T, F\}$. *Багатозначні* логіки вперше з'явились сто років тому: у 1920 р. Я. Лукасєвич запропонував [40] тризначні логіки для опису модальних висловлень, третє істиннісне значення ним трактувалось як "можливо", "нейтрально", "невизначено". Зазначимо, що опис модальностей за допомогою тризначної логіки виявився не зовсім адекватним, далі розвиток модальних логік пішов іншими шляхами. Найважливішим є той факт, що Я. Лукасєвич довів саму *можливість* існування некласичних логік, що за значущістю сумірне з відкриттям неевклідових геометрій.

Я. Лукасєвич розвинув тризначні логіки до чотиризначних та багатозначних. Він пов’язав ідею багатозначних логік з теорією імовірності, коли істиннісні значення можуть братися з неперервного інтервалу $[0, 1]$. Цей підхід згодом зумовив виникнення імовірнісних, можливісних та нечітких логік.

У 1921 р. Е. Пост запропонував (див. [4, 14]) n-значні логіки. На відміну від підходу Я. Лукасєвича, він зробив це цілком формально, без семантичного обґрунтування.

Найвідомішими із тризначних є сильна та слабка логіки С. Кліні [5], запропоновані для використання в теорії рекурсії. Сильна логіка Кліні застосовується в системах алгоритмічних алгебр [3], мовах табличних баз даних [15]. Відома також (див. [4]) тризначна логіка Бочвара (логіка абсурду), де третє істиннісне значення трактується як "беззмістовно". Вона фактично є слабкою логікою Кліні, розширеною зовнішніми логічними зв'язками, у яких для результатів ототожнено хибність і беззмістовність.

Нехай $Bool = \{b_1, \ldots, b_n\}$ – n-елементна множина істиннісних значень. Функцію вигляду $P : D \to Bool$ назвемо *n-предикатом* на множині D. Якщо $Bool = \{T, F\}$, то маємо 2-предикат – традиційний двозначний предикат.

Зауважимо, що тут ми використовуємо термін "n-предикат", а не "n-значний предикат" для того, щоб не змішувати поняття n-значного предиката як багатозначної функції, що на кожному даному може набувати до n значень, із поняттям предиката як однозначної функції з n-елементною множиною значень (напр., розглянуті нами R-предикати – це неоднозначні 2-предикати).

Тризначна логіка Лукасєвича. У нашій термінології – це логіка тотальних однозначних 3-предикатів. У логічній системі Лукасєвича було три класи висловлень – істинні, хибні, нейтральні. Позначаючи третє істиннісне значення як $\perp$, отримуємо такі визначення логічних зв'язок тризначної логіки Лукасєвича:

$$(\neg_{Ł} P)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = F, \\ F, & \text{якщо } P(d) = T, \\ \perp, & \text{якщо } P(d) = \perp. \end{cases}$$

$$(P \vee_{Ł} Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \mathbin{\&_{Ł}} Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \rightarrow_{Ł} Q)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = T \text{ або } P(d) = Q(d), \\ \qquad F, \text{ якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = F, \\ \qquad \perp \text{ у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

Еквіваленцію $\leftrightarrow_{Ł}$ тлумачимо як похідну зв'язку: $P \leftrightarrow_{Ł} Q$ означає $(P \rightarrow_{Ł} Q) \mathbin{\&_{Ł}} (Q \rightarrow_{Ł} P)$.

Лукасєвичеві імплікація та еквіваленція на парі $(\perp, \perp)$ відрізняються від імплікації та еквіваленції розглянутої нами логіки двозначних часткових предикатів:

$P(d) = Q(d) = \perp \Rightarrow (P \rightarrow_{Ł} Q)(d) = T$ та $(P \leftrightarrow_{Ł} Q)(d) = T$,
проте $(P \rightarrow Q)(d) = \perp$ та $(P \leftrightarrow_{Ł} Q)(d) = \perp$.

Аргументувати це можна таким чином. При трактуванні $\perp$ як проміжного між F та T істиннісного значення імплікація $A \rightarrow_{Ł} B$ як формалізація логічного наслідку має бути істинною, якщо істинність *B не менша* за істинність A. При цьому трактуванні вже неможливе таке стандартне подання імплікації через диз'юнкцію та заперечення: $P \rightarrow_{Ł} Q = \neg_{Ł} P \vee_{Ł} Q$.

Приклад 8.1.1. У логіці часткових 2-предикатів можна ввести зв'язки, аналогічні $\to_Ł$ та $\leftrightarrow_Ł$, коли $\perp$ трактуємо як "невизначеність". Проте такі зв'язки вже не будуть монотонними.

Багатозначні логіки Поста. Е. Пост запропонував свої багатозначні логіки тотальних однозначних предикатів майже одночасно з Лукасєвичем, проте зробив це більш формально, не беручи до уваги філософські та власне логічні мотиви.

Логічні функції (предикати) n-значної логіки Поста набувають значення у множині $\{1, 2, \ldots, n\}$. Диз'юнкція й кон'юнкція задаються так, як у багатозначній логіці Я. Лукасєвича:

$$(P \vee_P Q)(d) = \max(P(d), Q(d));$$
$$(P \,\&_P\, Q)(d) = \min(P(d), Q(d)).$$

Водночас Пост запропонував два варіанти заперечення – традиційне $\neg_P$ (як у Лукасєвича) та циклічне $\sim_P$.

Приклад 8.1.2. Традиційне $\neg_P$ та циклічне $\sim_P$ заперечення:

$$(\neg_P P)(d) = n+1-P(d);$$
$$(\sim_P P)(d) = \begin{cases} P(d)+1, \text{ якщо } P(d) < n, \\ 1, \text{ якщо } P(d) = n. \end{cases}$$

Приклад 8.1.3. Імплікацію у n-значній логіці визначають так:

$$(P \to_P Q)(d) = \min(n, n - P(d) + Q(d)).$$

Кон'юнкція $\&_P$, диз'юнкція $\vee_P$ та заперечення $\neg_P$ пов'язані законами де Моргана.

Сильна тризначна логіка Кліні. До найважливіших систем багатозначної логіки належать сильна та слабка тризначні логіки Кліні. Істиннісні значення таких логік позначаємо T, F, $\perp$.

Розглянемо сильну тризначну логіку Кліні тотальних однозначних 3-предикатів.

Задамо сильні клінієві зв'язки $\neg_K$, $\vee_K$, $\&_K$, $\to_K$:

$$(\neg_K P)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } P(d) = F, \\ F, \text{ якщо } P(d) = T, \\ \perp, \text{ якщо } P(d) = \perp. \end{cases}$$

$$(P \vee_K Q)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T, \\ F, \text{ якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp \text{ у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \&_K Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \to_K Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

Еквіваленція $\leftrightarrow_K$ визначається традиційно: $P \leftrightarrow_K Q$ означає $(P \to_K Q) \&_K (Q \to_K P)$.

Визначення логічних зв'язок $\neg_K$, $\vee_K$, $\&_K$ збігаються з визначеннями логічних зв'язок $\neg_Ł$, $\vee_Ł$, $\&_Ł$ тризначної логіки Лукасєвича, проте $\to_K$ та $\leftrightarrow_K$ задаються не так само, як $\to_Ł$ та $\leftrightarrow_K$.

Приклад 8.1.3. Для сильних клінієвих зв'язок маємо:

$P \&_K Q = \neg_K (\neg_K P \vee_K \neg_K Q)$;

$P \to_K Q = \neg_K P \vee_K Q$.

За базові пропозиційні композиції сильної тризначної логіки Кліні можна взяти $\neg_K$ та $\vee_K$, тоді композиції $\&_K$, $\to_K$, $\leftrightarrow_K$ є похідними.

Слабка тризначна логіка Кліні. Розглянемо слабку тризначну логіку Кліні тотальних однозначних 3-предикатів. На відміну від сильної тризначної логіки Кліні, значення композицій слабкої логіки вважається невизначеним, якщо хоча б один аргумент невизначений.

Слабкі клінієві зв'язки $\vee_W$ та $\&_W$ задамо так:

$$(P \vee_W Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d)\downarrow,\ Q(d)\downarrow \text{ та } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \&_W Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d)\downarrow,\ Q(d)\downarrow \text{ та } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

Заперечення $\neg_W$ задається так само як $\neg_K$.

Приклад 8.1.4. Імплікація $\to_W$ та еквіваленція $\leftrightarrow_W$ є похідними й визначаються так:

$P \to_W Q$ задається як $\neg_W P \vee_W Q$;

$P \leftrightarrow_W Q$ задається як $(P \to_W Q) \&_W (Q \to_W P)$.

Неважко переконатись, що сильні клінієві зв'язки є монотонними розширеннями відповідних слабких клінієвих зв'язок.

Чотиризначна логіка Белнапа. Дослідження чотиризначних логік започаткував ще Я.Лукасєвич. Проте на особливу увагу серед чотиризначних заслуговує логіка Белнапа [30]. Це зумовлено її застосуванням для опису інформаційних систем із неповною та суперечливою інформацією. Логіка Белнапа має сильний епістемічний відтінок, вона є зручним засобом формалізації відповідей на поставлені інформаційній системі запитання, якщо ця система містить неповні та суперечливі дані. При описі епістемічного стану системи треба брати до уваги як можливу суперечливість інформації, так і її відсутність.

Згідно з Белнапом, інформаційна система працює в режимі запитання-відповідь. При цьому інформаційні повідомлення, які система отримує з різних джерел, можуть бути підтверджені чи спростовані. Тому необхідно, щоб система не ігнорувала суперечливу інформацію і була в змозі продовжити в розумний спосіб функціонування навіть тоді, коли виявлено суперечності. Традиційна двозначна логіка в таких ситуаціях не працює, адже для неї наявність суперечності руйнує систему.

Отже, можна виділити чотири випадки.

1. Отримане системою повідомлення було підтверджено і ніколи не було спростовано. Таке повідомлення вважається *істинним* та позначається як T.

2. Отримане системою повідомлення було спростовано та ніколи не було підтверджено. Таке повідомлення вважається *хибним* та позначається як F.

3. Отримане системою повідомлення було як підтверджено, так і спростовано (ситуація дуже типова, напр., експериментальні результати різних груп можуть істотно відрізнятися; окрім того, людині властиво помилятися). Таке повідомлення можна вважати *парадоксальним*, позначаємо його як TF (у Белнапа – *Both*).

4. Система не має ні підтвердження, ні спростування повідомлення, про його істиннісне значення нічого не відомо. Тоді істиннісне значення повідомлення *невизначене*, його позначаємо як $\perp$ (у Белнапа – *None*).

Таким чином, отримуємо логіку із множиною істиннісних значень $\{T, F, \perp, TF\}$. Відповідно до змістів цих значень Белнап отримав [30] єдине продовження класичних логічних зв'язок $\neg$, $\vee$, & із $\{T, F\}$ на $\{T, F, \perp, TF\}$.

Приклад 8.1.5. Визначення логічних зв'язок логіки Белнапа $\neg_B$, $\vee_B$ та $\&_B$ подамо традиційно, у вигляді таблиць істинності.

P	T	F	$\perp$	TF
$\neg_B$	F	T	$\perp$	TF

$_P \vee_B {}^Q$	T	F	$\perp$	TF
T	T	T	T	T
F	T	F	$\perp$	TF
$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
TF	T	TF	T	TF

$_P \&_B {}^Q$	T	F	$\perp$	TF
T	T	F	$\perp$	TF
F	F	F	F	F
$\perp$	$\perp$	F	$\perp$	T
TF	TF	F	T	TF

Приклад 8.1.6. Імплікація $\to_B$ та еквіваленція $\leftrightarrow_B$ логіки Белнапа є похідними:

$P \to_B Q$ задається як $\neg_B P \vee_B Q$;

$P \leftrightarrow_B Q$ задається як $(P \to_B Q) \&_B (Q \to_B P)$.

Логіка Белнапа – це чотиризначна логіка тотальних однозначних предикатів. Водночас її можна трактувати як тризначну логіку *часткових* однозначних предикатів із множиною істиннісних значень $\{T, F, TF\}$.

Зауважимо, що використання тризначних логік тотальних однозначних предикатів, зокрема сильної логіки Кліні, для опису інформаційних систем із неповною та суперечливою інформацією здається неадекватним. Справді, $\perp$ та TF ототожнювати не можна, адже вони мають різний статус.

Те саме стосується двозначної логіки часткових однозначних предикатів, яка відповідає сильній логіці Кліні.

Нескінченнозначні логіки. Якщо множина істиннісних значень нескінченна, то логіку називають *нескінченнозначною*. Нескінченнозначними є такі спеціальні логіки, як імовірнісні, можливісні, нечіткі. Для нескінченнозначних *неперервних* логік множиною істиннісних значень є інтервал $[a, b]$. Без обмежень загальності таким інтервалом може бути $[0, 1]$.

Приклад 8.1.7. Логічні зв'язки $\neg_c$, $\vee_c$, $\&_c$, $\to_c$ неперервної логіки задаються так:

$$(\neg_c P)(d) = 1 - P(d);$$
$$(P \vee_c Q)(d) = \max(P(d), Q(d));$$
$$(P \,\&_c\, Q)(d) = \min(P(d), Q(d));$$
$$(P \to_c Q)(d) = \max(1 - P(d), Q(d)).$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке n-предикат на множині D?
2. Опишіть логічні зв'язки тризначної логіки Лукасєвича.
3. У чому полягає відмінність лукасєвичевих $\to_Ł$ та $\leftrightarrow_Ł$ від імплікації та еквіваленції логіки часткових 2-предикатів?
4. Дайте визначення логічних зв'язок n-значної логіки Поста.
5. Опишіть різновиди заперечення в n-значній логіці Поста.
6. Дайте визначення логічних зв'язок сильної тризначної логіки Кліні.
7. Дайте визначення логічних зв'язок слабкої тризначної логіки Кліні.

8. Як трактуються істиннісні значення в чотиризначній логіці Белнапа?

9. Дайте визначення логічних зв'язок логіки Белнапа.

10. Дайте визначення логічних зв'язок неперервної логіки.

Вправи

1. З'ясуйте співвідношення між зв'язками $\neg_{Ł}$, $\vee_{Ł}$, $\&_{Ł}$, $\rightarrow_{Ł}$ тризначної логіки Лукасєвича.

2. Доведіть, що зв'язки n-значної логіки Поста $\&_P$, $\vee_P$ та $\neg_P$ пов'язані законами де Моргана.

3. Дайте явні визначення зв'язок $\rightarrow_W$ та $\leftrightarrow_W$ слабкої тризначної логіки Кліні.

4. З'ясуйте, чи пов'язані законами де Моргана зв'язки $\neg_W$, $\vee_W$ та $\&_W$ слабкої тризначної логіки Кліні.

5. Дайте визначення зв'язок $\rightarrow_B$ та $\leftrightarrow_B$ логіки Белнапа у вигляді таблиць істинності.

6. З'ясуйте, чи пов'язані законами де Моргана зв'язки $\neg_B$, $\vee_B$ та $\&_B$ логіки Белнапа.

7. З'ясуйте, чи пов'язані законами де Моргана зв'язки $\neg_c$, $\vee_c$ та $\&_c$ неперервної логіки.

8.2. Інтуїціоністська логіка

Криза основ математики на межі XIX–XX ст., зумовлена відкриттям парадоксів теорії множин, спонукала вчених шукати шляхи виходу з цього стану. Один з таких шляхів запропонував на початку XX ст. голландський математик Л. Брауер. Він стверджував, що закони математики не мають ні абсолютного, ні апріорного характеру. Ці закони є узагальненням роботи зі скінченними множинами стійких у часі об'єктів, тому їх поширення на нескінченні множини об'єктів неадекватне. Отже, необхідно або цілком відмовитися від нескінченних множин, що не зовсім розумно, або перейти до нової логіки, інтуїтивно зрозумілої. Така логіка має описувати математичні твердження не як абстрактні істину чи фальш, а як твердження про можливість виконання деякої побудови. Математичне доведення має давати таку побудову та її обґрунтування.

Такі методи, що дають побудову, Брауер назвав *ефективними*, а запропоновану ним логіку й математику – *інтуїціоністськими*.

Перші формальні моделі інтуїціоністської логіки ввів А. Гейтінг – учень Л. Брауера. Згодом з'явились семантичні моделі (інтерпретації) інтуїціоністської логіки.

Для інтуїціоністської логіки не діють закон виключеного третього і пов'язані з ним закони де Моргана, закон зняття подвійного заперечення. Пропозиційні зв'язки $\neg$, $\vee$, **&**, $\rightarrow$ тут незалежні, проте еквіваленція подається через імплікацію та кон'юнкцію: $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$. Квантори $\exists \boldsymbol{x}$ та $\forall \boldsymbol{x}$ теж незалежні.

Мова інтуїціоністської логіки. Розглянемо інтуїціоністську логіку пропозиційного рівня – *інтуїціоністську пропозиційну логіку* (ІПЛ). Задамо синтаксис мови ІПЛ.

Алфавіт мови: символи логічних зв'язок $\neg$, $\vee$, &, $\rightarrow$; множина *Ps* пропозиційних символів.

Множину формул мови ІПЛ позначимо *Fp*. Індуктивне визначення формули мови ІПЛ:

1) кожний $A \in Ps$ є формулою;

2) якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $\&\Phi\Psi$, $\rightarrow\Phi\Psi$ – формули.

Далі розглянемо *чисту першопорядкову інтуїціоністську логіку предикатів* (ІЛП).

Задамо синтаксис мови ІЛП.

Алфавіт мови складається з таких символів:

– предметні імена (змінні) x, y, z,...;

– предикатні символи (ПС) p_0, p_1, p_2,... заданої арності;

– символи логічних операцій $\neg$, $\vee$, &, $\rightarrow$ та $\exists x$, $\forall x$.

Множина *Ps* предикатних символів – це *сигнатура* мови ІЛП.

Атомарна формула мови ІЛП – це вираз вигляду $px_1...x_n$, де p – n-арний ПС, x_1, ..., x_n – предметні імена (змінні).

Дамо індуктивне визначення формули мови ІЛП:

1) кожна атомарна формула є формулою;

2) якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $\&\Phi\Psi$, $\rightarrow\Phi\Psi$ – формули;

3) якщо Φ – формула, x – предметне ім'я, то $\exists x\Phi$ та $\forall x\Phi$ – формули.

Множину формул мови ІЛП позначимо Fr.

Реляційна семантика інтуїціоністської логіки. На відміну від класичної логіки, яка є логікою конкретного знання, інтуїціоністська логіка передбачає накопичення знань. На цій ідеї Брауера базуються найпопулярніші семантичні моделі інтуїціоністської логіки – *моделі можливих світів*, або *реляційні моделі*. Моделі можливих світів були започатковані Л. Брауером і А. Гейтінгом, далі розвинуті С. Кріпке та Я. Хінтіккою. Вони також успішно використовуються для описання семантики модальних логік.

Моделлю можливих світів інтуїціоністської логіки, або *реляційною інтуїціоністською моделлю,* назвемо трійку $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \rhd, I)$.

Тут $\boldsymbol{S}$ – множина світів, $\rhd$ – бінарне відношення на $\boldsymbol{S}$, I – відображення інтерпретації атомарних формул на світах. Відношення $\rhd$ є відношенням часткового порядку на $\boldsymbol{S}$.

Задамо для випадку ІПЛ відображення інтерпретації: $I : Ps{\times}\boldsymbol{S}\to\{T, F\}$.

Світи узгоджуються з відношенням $\rhd$ так. Якщо $\alpha \rhd \beta$ та $I(\mathrm{A}, \alpha) = T$, то $\boldsymbol{I}(\mathrm{A}, \beta) = T$. Це означає: при русі світами за відношенням $\rhd$ істинність атомарних формул *не може* перейти у фальш.

Відображення $I : Ps{\times}\boldsymbol{S}\to\{T, F\}$ індуктивно продовжимо до відображення $J : Fp{\times}\boldsymbol{S}\to\{T, F\}$:

1) $J(\mathrm{A}, \alpha) = I(\mathrm{A}, \alpha)$ для всіх $\mathrm{A}\in Ps$;

2) $J(\Phi\vee\Psi, \alpha) = T \Leftrightarrow J(\Phi, \alpha) = T$ або $J(\Phi, \alpha) = T$;

3) $J(\Phi\&\Psi, \alpha) = T \Leftrightarrow J(\Phi, \alpha) = T$ та $J(\Phi, \alpha) = T$;

4) $J(\neg\Phi, \alpha) = T \Leftrightarrow$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd \beta$, маємо $J(\Phi, \beta) = F$;

5) $J(\Phi\to\Psi, \alpha) = T \Leftrightarrow$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd \beta$, маємо: якщо $J(\Phi, \beta) = T$, то $J(\Psi, \beta) = T$.

Те, що $J(\Phi, \alpha) = T$, тобто формула Φ істинна у світі α, позначаємо $\alpha \models \Phi$.

Формула Φ *істинна в реляційній моделі* $\boldsymbol{M}$ (позн. $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо для всіх $\alpha \in \boldsymbol{S}$ маємо $\alpha \models \Phi$.

Формула Φ *інтуїціоністськи істинна* (позн. $\models \Phi$), якщо для кожної реляційної моделі $\boldsymbol{M}$ маємо $\boldsymbol{M} \models \Phi$.

Для ІЛП світами є АС заданої сигнатури σ, яка визначає мову такої логіки.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $I : \bigcup_{\alpha \in S} (Ps \times \boldsymbol{S} \to Pr^{\alpha})$.

Світи узгоджуються з відношенням $\rhd$ таким чином:

– нехай $\alpha = (A, \sigma)$, $\beta = (B, \sigma)$ та $\alpha \rhd \beta$, тоді $A \subseteq B$;

– нехай $p \in Ps$; якщо $\alpha \rhd \beta$ та $p_{\alpha}(a_1,..., a_n) = T$, то $p_{\beta}(a_1,..., a_n) = T$.

Отже, при русі світами за відношенням $\rhd$ їхні носії можуть тільки розширюватися, при цьому істинність атомарних формул не може перейти у фальш.

Значення формули у світі α визначаємо індуктивно:

1) для атомарних формул $p_{\alpha}(d) = T$ означає $\boldsymbol{I}(p, \alpha)(d) = T$;

2) $(\Phi \vee \Psi)_{\alpha}(d) = T \Leftrightarrow \Phi_{\alpha}(d) = T$ або $\Psi_{\alpha}(d) = T$;

3) $(\Phi \& \Psi)_{\alpha}(d) = T \Leftrightarrow \Phi_{\alpha}(d) = T$ та $\Psi_{\alpha}(d) = T$;

4) $(\neg \Phi_{\alpha})(d) = T \Leftrightarrow$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd \beta$, маємо $\Phi_{\beta}(d) = F$;

5) $(\Phi \to \Psi)_{\alpha}(d) = T \Leftrightarrow$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd \beta$, маємо: якщо $\Phi_{\beta}(d) = T$, то $\Psi_{\beta}(d) = T$;

6) $(\exists x \Phi)_{\alpha}(d) = T \Leftrightarrow$ для деякого $a \in A$ маємо $\Phi_{\alpha}(d \nabla x \mapsto a) = T$;

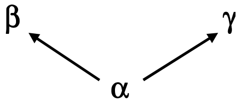
7) $(\forall x \Phi)_{\alpha}(d) = T \Leftrightarrow$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd \beta$, для всіх $a \in B$ маємо $\Phi_{\beta}(d \nabla x \mapsto a) = T$.

Істинність формули Φ у світі α позначаємо $\alpha \models \Phi$.

Формула Φ *істинна в реляційній моделі* $\boldsymbol{M}$ (позн. $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо для всіх $\alpha \in \boldsymbol{S}$ маємо $\alpha \models \Phi$.

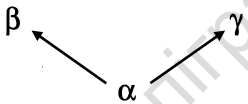
Формула Φ мови сигнатури σ *інтуїціоністськи істинна* (позн. $_{\boldsymbol{I}}\models \Phi$), якщо для кожної реляційної моделі $\boldsymbol{M}$ зі світами сигнатури σ маємо $\boldsymbol{M} \models \Phi$.

Приклад 8.2.1. Покажемо, що формула $A\vee\neg A$ не є інтуїціоністськи істинною. Для цього вкажемо для неї контрмодель – реляційну модель $\boldsymbol{M}$ таку, що $\boldsymbol{M} \not\models A\vee\neg A$.



Задамо $I(A,\alpha) = F$, $I(A,\beta) = T$, $I(A,\gamma) = F$. Тоді неправильно $\alpha \models A$. Для правильності $\alpha \models \neg A$ необхідно $\alpha \not\models A$, $\gamma \not\models A$, $\beta \not\models A$. Однак $I(A,\beta) = T$, тому $\beta \models A$. Отже, неправильно $\alpha \not\models \neg A$, звідки $\alpha \not\models A\vee\neg A$, тому $\boldsymbol{M} \not\models A\vee\neg A$.

Приклад 8.2.2. Покажемо, що формула $(A\to B)\vee(B\to A)$ не є інтуїціоністськи істинною. Для цього вкажемо для неї контрмодель $\boldsymbol{M}$ таку, що $\boldsymbol{M} \not\models (A\to B)\vee(B\to A)$.



Задамо $I(A,\alpha) = F$, $I(B,\alpha) = F$, $I(A,\beta) = T$, $I(B,\beta) = F$, $I(A,\gamma) = F$, $I(B,\gamma) = T$. Тоді маємо: $\beta \models A$, $\beta \not\models B$, $\gamma \models B$, $\gamma \not\models A$. Тепер, згідно з $\alpha \triangleright \beta$, маємо $\alpha \not\models A\to B$, а згідно з $\alpha \triangleright \gamma$, тоді $\alpha \not\models B\to A$. Отже, $\alpha \not\models (A\to B)\vee(B\to A)$, тому $\boldsymbol{M} \not\models (A\to B)\vee(B\to A)$.

Приклад 8.2.3. Покажемо, що формула $\neg\neg A\to A$ не є інтуїціоністськи істинною. Для цього вкажемо для неї контрмодель – реляційну модель $\boldsymbol{M}$ таку, що $\boldsymbol{M} \not\models \neg\neg A\to A$.

Задамо $I(A, \alpha) = I(A, \beta) = I(A, \gamma) = F$, $I(A, \delta) = T$. Тоді внаслідок $\beta \rhd \gamma \rhd \delta$ маємо $I(\neg A, \gamma) = F$ та $I(\neg\neg A, \beta) = T$, тому згідно з $\alpha \rhd \beta$ та $I(A, \beta) = F$ маємо $I(\neg\neg A \to A, \alpha) = F$.

Звідси отримуємо $\alpha \not\models \neg\neg A \to A$, тому $\boldsymbol{M} \not\models \neg\neg A \to A$.

Приклад 8.2.4. Задамо $\boldsymbol{M}$ таку, що $\boldsymbol{M} \models \neg\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$.

$$\begin{array}{l} \dots \\ \uparrow \\ \boldsymbol{\alpha_2}\ A_2 = \{0, 1, 2\} \\ \uparrow \\ \boldsymbol{\alpha_1}\ A_1 = \{0, 1\} \\ \uparrow \\ \boldsymbol{\alpha_0}\ A_0\{0\} \end{array}$$

Для кожного α_n його носій – це $A_n = \{0, 1,\dots, n\}$.

Задамо $P_{\alpha_n}(k) = T$ для всіх $k < n$ та $P_{\alpha_n}(n) = F$.

Маємо $P_{\alpha_0}(0) = F$; але $\neg P_{\alpha_0}(0) = T$ означає $P_{\alpha_n}(0) = F$ для всіх n, що неправильно, тому $\neg P_{\alpha_0}(0) = F$. Отже, $(P \vee \neg P)_{\alpha_0}(0) = F$.

Маємо $P_{\alpha_1}(0) = F$; але $\neg P_{\alpha_1}(1) = T$ означає $P_{\alpha_n}(1) = F$ для всіх $n \geq 1$, що неправильно, тому $\neg P_{\alpha_1}(1) = F$. Отже, $(P \vee \neg P)_{\alpha_1}(1) = F$.

Продовжуючи, отримуємо $(P \vee \neg P)_{\alpha_2}(2) = F$ тощо.

Отже, $(P \vee \neg P)_{\alpha_n}(n) = F$ для кожного α_n, тому $(\forall x(P(x) \vee \neg P(x)))_{\alpha_n} = F$ для кожного α_n. Звідси для кожного α_n маємо $\alpha_n \models \neg\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$, тому $\boldsymbol{M} \models \neg\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$.

Зауважимо, що у класичній логіці $\models \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$. Це знову підтверджує, що в інтуїціоністській логіці є формули, які суперечать формулам класичної логіки.

Інтуїціоністські числення. Інтуїціоністські числення гільбертівського типу та ґенценівського (секвенційного) типу розглянуто, зокрема, у [5, 8]. Стисло опишемо лише чисте інтуїціоністське числення предикатів (ЧІЧП).

Приклад 8.2.5. Множина аксіом ЧІЧП визначається такими схемами аксіом:

A1) $A \to (B \to A)$;

A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

A3) $A \& B \to A$;

A4) $A \& B \to B$;

A5) $A \to (B \to A \& B)$;

A6) $A \to A \vee B$;

A7) $B \to A \vee B$;

A8) $(A \to C) \to (B \to C)) \to (A \vee B \to C)$;

A9) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;

AI) $\neg A \to (A \to B)$;

AQ1) $A \to \exists x A$;

AQ2) $\forall x A \to A$.

Множина правил виведення ЧІЧП:

MP) $A,\ A \to B \mid\!- B$ – *modus ponens*;

П$\exists$) $A \to B \mid\!- \exists x A \to B$, якщо x не вільна у B, – правило $\exists$-введення;

П$\forall$) $A \to B \mid\!- A \to \forall x B$, якщо x не вільна в A, – правило $\forall$-введення.

Кожна теорема ЧІЧП є теоремою класичного числення предикатів, але зворотне неправильне.

Приклад 8.2.6. У ЧІЧП не можна вивести $\neg\neg A \to A$, $A \vee \neg A$, але можна вивести $A \to \neg\neg A$.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає сутність підходу Брауера до побудови інтуїціоністської логіки?

2. Які закони класичної логіки не діють для інтуїціоністської логіки?

3. Опишіть синтаксис мови інтуїціоністської пропозиційної логіки (ІПЛ).

4. Опишіть синтаксис мови інтуїціоністської логіки предикатів (ІЛП).

5. Що таке модель можливих світів (реляційна модель) інтуїціоністської логіки?

6. Як задається відображення інтерпретації для випадку ІПЛ?

7. Як задається відображення інтерпретації для випадку ІЛП?

8. Що означає узгодженість світів з відношенням $\rhd$ для випадку ІПЛ?

9. Як задається значення формули у світі α для випадку ІПЛ?

10. Що є світами реляційної моделі для випадку ІПЛ?

11. Що означає узгодженість світів з відношенням $\rhd$ для ІЛП?

12. Як задається значення формули у світі α для випадку ІЛП?

13. Як визначається істинність формули в реляційній моделі інтуїціоністської логіки?

14. Дайте визначення інтуїціоністськи істинної формули для випадків ІПЛ та ІЛП.

15. Що таке контрмодель для формули інтуїціоністської логіки?

16. Наведіть приклади тавтологій, які не є інтуїціоністськи істинними.

17. Наведіть приклади всюди істинних формул, які не є інтуїціоністськи істинними.

Вправи

1. Побудуйте реляційну модель $\boldsymbol{M}$ інтуїціоністської логіки таку:

1) $\boldsymbol{M} \not\models (A \to B) \to \neg A \vee B$;
2) $\boldsymbol{M} \not\models (B \to \neg A) \to (\neg A \vee \neg B)$;
3) $\boldsymbol{M} \not\models (\neg B \to A) \to A \vee B$;
4) $\boldsymbol{M} \not\models (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;
5) $\boldsymbol{M} \not\models (\neg B \to A) \to (\neg A \to B)$;
6) $\boldsymbol{M} \not\models (\neg A \to \neg B) \to (\neg\neg B \to A)$;
7) $\boldsymbol{M} \not\models ((A \to B) \to A) \to A$;
8) $\boldsymbol{M} \not\models \neg(A \& B) \to \neg A \vee \neg B$;
9) $\boldsymbol{M} \not\models (A \to B \vee C) \to (A \to B) \vee (A \to C)$;
10) $\boldsymbol{M} \not\models (A \leftrightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C) \vee (A \leftrightarrow C)$.

2. Побудуйте реляційну модель $\boldsymbol{M}$ інтуїціоністської логіки таку:

$$\boldsymbol{M} \not\models (A_1 \leftrightarrow A_2) \vee (A_1 \leftrightarrow A_3) \vee \ldots \vee (A_1 \leftrightarrow A_n) \vee \ldots \vee (A_{n-1} \leftrightarrow A_n).$$

Зауважимо, що ця формула – тавтологія класичної логіки. Це засвідчує, що інтуїціоністська логіка не може задаватися жодною скінченною множиною істиннісних значень.

3. Побудуйте реляційну модель $\boldsymbol{M}$ інтуїціоністської логіки таку:

$\boldsymbol{M} \models \neg\forall x P(x)$ та $\boldsymbol{M} \not\models \exists x P(x)$.

4*. Побудуйте в ЧІЧП виведення таких формул:

1) $A \to \neg\neg A$;

1) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$;

3) $\neg\neg(A \vee \neg A)$;

4) $\neg\neg(\neg\neg A \to A)$;

5) $\neg\neg\neg A \to \neg A$;

6) $\neg\neg\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$.

9. МОДАЛЬНІ ЛОГІКИ

Традиційні логіки орієнтовані на опис одного конкретного стану світу. Якщо світ змінюється та розвивається, то для його опису доцільно використовувати модальні логіки [16, 19, 31, 33, 36]. Модальності – це властивості тверджень, які в тому чи іншому аспекті характеризують міру їх істинності чи наше ставлення до них. Серед модальних логік виділяються загальні, або алетичні, темпоральні, епістемічні, деонтичні тощо.

Модальності "необхідно" й "можливо" називають загальними, або алетичними.

Модальності, які мають часовий зміст, називають часовими, або темпоральними. До основних часових відносять модальності "завжди було", "колись було", "завжди буде", "колись буде". Міркування з твердженнями, що містять часові модальності, вивчає часова, або темпоральна, логіка.

Модальності, що характеризують міру обґрунтованості знання, називають епістемічними. Такими є модальності "достовірно", "доведено", "підтверджено", "обґрунтовано", "вірогідно", "спростовно". Міркування з твердженнями, що містять епістемічні модальності, вивчає епістемічна логіка, або логіка знання.

Модальності "обов'язково", "дозволено", "заборонено" характеризують норми й нормативні поняття. Такі модальності називаються деонтичними. Логіка, у якій вивчаються міркування з деонтичними модальностями, називається деонтичною, або прескриптивною. Уживана також назва "логіка норм".

Останні роки характеризуються бурхливим розвитком модальних логік. Такі логіки можуть ефективно використовуватись для аналізу й моделювання різноманітних предметних областей і аспектів діяльності людини. Особливого значення модальні логіки набувають (див., напр., [29, 35–39, 41, 42]) у зв'язку зі створенням сучасних інформаційних та програмних систем. Епістемічна логіка успішно застосовується для опису інтелектуальних інформаційних систем. Дуже важливим є використання апарату темпоральної логіки для адекватного опису й моделювання складних динамічних систем, специфікації та верифікації програм.

Модальні та темпоральні логіки відомі з античності (Арістотель, Діодор Кронос). Виникнення сучасної модальної логіки започатковано дослідженнями К. Льюїса у 1912–1916 рр. та Я. Лукасєвича у 1920 р. Особливе значення мала робота "Symbolic logic", написана К. Льюїсом і К. Ленгфордом у 1932 р. У роботах цього періоду формалізовано систему класичних модальностей і розпочато дослідження різних систем модальної логіки (класичні аксіоматичні системи S1–S5). Модальність трактується як спеціальний оператор (композиція), який застосовується до предикатів. Уточненням і формалізацією модальних логік займались К. Ґедель, Я. Лукасєвич, Д. Гільберт, Ґ. Ґенцен, А. Тарський, Р. Карнап та ін.

Спочатку дослідження модальних логік велись у синтаксичному стилі, для них не було чітко сформульованих семантик. Уперше алгебраїчна семантика для системи S4 була побудована в 1948 р. (А. Тарський, Дж. Мак-Кінсі). Інтенсивна розробка семантик модальних логік розпочалась на рубежі 50–60-х рр. XX ст. Важливим етапом у розвитку модальних логік була розробка семантик можливих світів, або реляційних семантик (С. Канґер, С. Кріпке, Я. Хінтікка). Концепція можливих світів природно пов'язана з модальною логікою. Фундаментальним поняттям цієї концепції є поняття можливості одного світу відносно іншого. Семантичні моделі модальної логіки на основі зазначеної концепції дозволяють природно трактувати як загальні модальності "необхідно" й "можливо", так і спеціальні модальності (часові, епістемічні, деонтичні).

Семантики можливих світів виявились дуже плідними для дослідження інших типів логік, зокрема інтуїціоністської логіки. Згодом були запропоновані узагальнення реляційної семантики (Д. Скотт, Р. Монтегю).

9.1. Алетичні модальні логіки

Основними модальними операторами алетичної (загальної) модальної логіки є оператори $\Box$ – "необхідно" та $\Diamond$ – "можливо". Вони пов'язані таким чином: $\Diamond P = \neg\Box\neg P$ та $\Box P = \neg\Diamond\neg P$.

На початкових етапах дослідження модальної логіки велика увага приділялась вивченню суперпозицій основних модальностей, таких, наприклад, як "необхідно, що необхідно", "необхідно, що можливо", "можливо, що необхідно, що можливо" тощо. Такі суперпозиції модальностей з інтуїтивного погляду дещо дивні, тому були запропоновані аксіоми, що дозволяли зводити складні модальності до модальностей певної форми.

Приклад 9.1.1. У найсильнішій формі редукція модальностей реалізована в системі S5, де кожна суперпозиція модальностей еквівалентна модальності без суперпозицій. Це означає, що для предиката P маємо шість таких різних предикатів: P, $\Box P$, $\Diamond P$, $\neg P$, $\Box\neg P$, $\Diamond\neg P$.

Приклад 9.1.2. Найприродніша з редукцій модальностей зводить повторення однакових модальних операторів $\Box$ чи $\Diamond$ до єдиного такого оператора. У відповідній системі S4 існує 14 різних модальностей: P, $\Box P$, $\Diamond P$, $\Box\Diamond P$, $\Diamond\Box P$, $\Box\Diamond\Box P$, $\Diamond\Box\Diamond P$ та 7 дуальних модальностей, коли замість P беремо $\neg P$.

Для ще слабшої системи S3 існує 42 різні модальності, а для систем S2 та S1 кількість різних модальностей нескінченна.

Розглянемо найпопулярніші аксіоматичні системи загальної, або алетичної, модальної логіки на пропозиційному рівні. Мова цих систем – розширення мови пропозиційної логіки.

Алфавіт мови складається із множини Ps предикатних символів, символів пропозиційних композицій $\neg$, $\vee$ та символу $\Box$ модальної композиції (модального оператора) "необхідно".

Множина формул Fm визначається індуктивно:

1) кожний $P\in Ps$ є формулою, такі формули атомарні;

2) нехай Φ та Ψ – формули, тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $\Box\Phi$ – формули.

Символ $\Diamond$ трактується як скорочення для $\neg\Box\neg$.

Приклад 9.1.3. Аксіоматична система *K*. Множина аксіом системи K складається з аксіом пропозиційної логіки та аксіом, що задаються схемою

AxNr) $\Box(\Phi\to\Psi)\to(\Box\Phi\to\Box\Psi)$.

Приклад 9.1.4. Аксіоматична система *T*. Множина аксіом складається з аксіом системи K та аксіом, що задаються схемою

Ax$\Box$) $\Box\Phi\to\Phi$.

Приклад 9.1.5. Аксіоматична система *B* (брауерівська). Множина аксіом складається з аксіом системи *T* та аксіом, що задаються схемою

AxB) $\Phi\to\Box\Diamond\Phi$.

Приклад 9.1.6. Аксіоматична система *S*4. Множина аксіом складається з аксіом системи *T* та аксіом, що задаються схемою

AxS4) $\Box\Phi\to\Box\Box\Phi$.

Приклад 9.1.7. Аксіоматична система *S*5. Множина аксіом складається з аксіом системи *T* та аксіом, що задаються схемою

AxS5) $\Diamond\Phi\to\Box\Diamond\Phi$.

Правила виведення всіх наведених вище систем складаються з правил виведення пропозиційної логіки, до яких додається *правило модалізації*:

ПМ) $\Phi \vdash \Box\Phi$.

Системи модальної логіки, які включають схему аксіом AxNr і правило ПМ, називаються нормальними.

Зауважимо, що льюїсові системи S1, S2 та S3 [19] не є нормальними.

Те, що формула Φ є теоремою системи *K*, *T*, *B*, *S*4, *S*5, будемо відповідно позначати так:

${}_{K}\vdash$, ${}_{T}\vdash$, ${}_{B}\vdash$, ${}_{S4}\vdash$, ${}_{S5}\vdash$.

Приклад 9.1.8. Повний опис пропозиційної аксіоматичної модальної системи *S*4.

Схеми аксіом:

AxПР) $\neg\Phi\vee\Phi$ (пропозиційні аксіоми);

AxNr) $\Box(\Phi\to\Psi)\to(\Box\Phi\to\Box\Psi)$;

Ax□) $\Box\Phi\to\Phi$;

AxS5) $\Diamond\Phi\to\Box\Diamond\Phi$.

Правила виведення:

П1) $\Phi \vdash \Psi\vee\Phi$ – розширення;

П2) $\Phi\vee\Phi \vdash \Phi$ – скорочення;

П3) $\Phi\vee(\Psi\vee\Xi) \vdash (\Phi\vee\Psi)\vee\Xi$ –асоціативності;

П4) $\Phi\vee\Psi,\ \neg\Phi\vee\Xi \vdash \Psi\vee\Xi$ – перетину;

ПМ) $\Phi \vdash \Box\Phi$ – модалізації.

Семантику описаних аксіоматичних систем модальної логіки можна задавати різними способами. Спочатку були запропоновані алгебраїчні семантики, однак вони виявились не зовсім прийнятними з інтуїтивного погляду. Це змусило шукати іншу, змістовнішу інтерпретацію модальних систем. Такими є реляційні семантики, або семантики можливих світів.

Моделлю можливих світів, або *реляційною моделлю*, назвемо трійку $\boldsymbol{M} = (S, \rhd, I)$.

Тут S – множина світів, $\rhd$ – бінарне відношення на S, I – відображення $I : Ps \times S \to \{T, F\}$ інтерпретації атомарних формул на світах.

Нехай $\alpha, \beta \in S$. Традиційне трактування $\alpha \rhd \beta$ таке: світ β *можливий* відносно світу α, або світ β *досяжний* зі світу α. Це означає, що всяке твердження, істинне у світі β, можливе у світі α. Тому $\rhd$ називають відношенням досяжності.

При такому розумінні кожне твердження, істинне в α, можливе в α, звідки $\alpha \rhd \alpha$. Це означає, що при такому розумінні відношення $\rhd$ рефлексивне, проте це не так у загальному випадку (напр., для деонтичних систем це відношення іррефлексивне).

Відображення $I : Ps{\times}S{\to}\{T, F\}$ індуктивно продовжується до відображення інтерпретації формул на світах $I : Fm{\times}S{\to}\{T, F\}$:

– $I(\neg\Phi, \alpha) = \neg(I(\Phi, \alpha))$;

– $I(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(I(\Phi, \alpha), I(\Phi, \alpha))$;

– $I(\Box\Phi, \alpha) = T \Leftrightarrow I(\Phi, \beta) = T$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$, інакше $I(\Box\Phi, \alpha) = F$.

Таким чином, Φ *необхідно* істинна у світі α, якщо Φ істинна в усіх світах, досяжних з α.

Формула Φ *істинна в моделі* $\boldsymbol{M}$ (позначаємо $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо $I(\Phi, \alpha) = T$ для всіх $\alpha \in \boldsymbol{S}$.

Модель можливих світів $\boldsymbol{M}$ називають:

1) T-моделлю, якщо $\rhd$ рефлексивне;

2) B-моделлю, якщо $\rhd$ рефлексивне й симетричне;

3) *S*4-моделлю, якщо $\rhd$ рефлексивне й транзитивне;

4) *S*5-моделлю, якщо $\rhd$ рефлексивне, транзитивне, симетричне.

Формула Ф *T-істинна* (*B-істинна*, *S4-істинна*, *S5-істинна*), що позначаємо ${}_T|\!=\Phi$ (відп. ${}_B|\!=\Phi$, ${}_{S4}|\!=\Phi$, ${}_{S5}|\!=\Phi$), якщо Ф істинна на кожній *T*-моделі (*B*-моделі, *S*4-моделі, *S*5-моделі).

Відомо [19, 14], що між аксіомами AxB, AxS4, AxS5 і властивостями відношення досяжності $\rhd$ для *B*-моделей, *S*4-моделей, *S*5-моделей існує безпосередній зв'язок:

AxB дає умову симетричності відношення досяжності;

AxS4 дає умову транзитивності відношення досяжності;

AxS5 дає умову транзитивності й симетричності відношення досяжності.

Багато важливих властивостей відношення досяжності описуються відповідними схемами аксіом з модальностями, наприклад щільність, зв'язність, функціональність тощо [4, 14].

Приклад 9.1.8. Щільність відношення досяжності описується схемою аксіом

Ax*Dn*) $\Box\Box\Phi\rightarrow\Box\Phi$.

Водночас деякі властивості відношення досяжності, зокрема іррефлексивність, асиметричність, антисиметричність, описати аксіомами такого типу неможливо (див., напр., [14]).

Для описаних модальних систем справджуються теореми коректності й повноти [16, 19].

Теорема 9.1.1. Для кожної формули Ф мови алетичної модальної логіки:

1) ${}_T|\!-\Phi \Leftrightarrow {}_T|\!=\Phi$;
2) ${}_B|\!-\Phi \Leftrightarrow {}_B|\!=\Phi$;
3) ${}_{S4}|\!-\Phi \Leftrightarrow {}_{S4}|\!=\Phi$;
4) ${}_{S5}|\!-\Phi \Leftrightarrow {}_{S5}|\!=\Phi$.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке модальність?
2. Які модальності називають алетичними? Наведіть приклади.

3. Які модальності називають темпоральними? Наведіть приклади.

4. Які модальності називають епістемічними? Наведіть приклади.

5. Які модальності називають деонтичними? Наведіть приклади.

6. Де використовують модальні логіки?

7. Які співвідношення пов'язують модальні оператори □ та ◊?

8. Опишіть алфавіт і дайте визначення формули мови алетичної модальної логіки.

9. Опишіть аксіоматичні системи *K*, *T*, *B*, *S*4, *S*5 алетичної модальної логіки.

10. Сформулюйте правило модалізації.

11. Що таке модель можливих світів (реляційна модель) алетичної модальної логіки?

12. Чому відношення на світах називають відношенням досяжності?

13. Як задається відображення інтерпретації формул на світах?

14. Як визначається істинність формули в реляційній моделі?

15. Дайте визначення реляційної *T*-моделі, *B*-моделі, *S*4-моделі, *S*5-моделі.

16. Дайте визначення *T*-істинної, *B*-істинної, *S*4-істинної, *S*5-істинної формули.

17. Як пов'язані аксіоми AxB, AxS4, AxS5 та властивості відношення досяжності?

18. Сформулюйте теореми коректності й повноти систем алетичної модальної логіки.

Вправи

1. Дайте повні описи аксіоматичних модальних систем *T*, *B* та *S5*.

2. З’ясуйте, у якому відношенні щодо *T*-істинності перебувають формули $\Phi\to\Diamond\Phi$, $\Diamond\Phi\to\Phi$, $\Box\Phi\to\Phi$, $\Phi\to\Box\Phi$, $\Box\Phi\to\Diamond\Phi$, $\Diamond\Phi\to\Box\Phi$.

3. Поясніть зв'язок аксіоми Ax□ із рефлексивністю відношення досяжності.

4. Поясніть зв'язок аксіом AxB, AxS4, AxS5 із відповідними властивостями відношення досяжності для *B*-систем, *S4*-систем, *S5*-систем.

5. Покажіть, що формули вигляду $\Box A \to A$, $A \to \Box A$, $\Box A \to \Box\Box A$, $\Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Box B)$ істинні не на всіх реляційних моделях. Наведіть відповідні приклади таких моделей.

6. З'ясуйте, які властивості відношення досяжності описують такі схеми аксіом:

1) $\Box\Phi \to \Diamond\Phi$;
2) $\Diamond\Phi \to \Box\Phi$;
3) $\Diamond\Phi \leftrightarrow \Box\Phi$;
4) $\Diamond\Box\Phi \to \Box\Diamond\Phi$.

7. Доведіть у *T*-численні:

1) якщо $\vdash A \to B$, то $\vdash \Box A \to \Box B$ та $\vdash \Diamond A \to \Diamond B$;
2) якщо $\vdash A \leftrightarrow B$, то $\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$ та $\vdash \Diamond A \leftrightarrow \Diamond B$;
3) $\vdash \Diamond(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$;
4) $\vdash \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$;
5) $\vdash \Box(A \& B) \leftrightarrow (\Box A \& \Box B)$;
6) $\vdash (\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$;
7) $\vdash \Diamond(A \& B) \to (\Diamond A \& \Diamond B)$;
8) $\vdash \Box(A \to \Diamond(B \to C)) \to \Diamond(B \to \Box A \to \Diamond B)$.

9.2. Темпоральні логіки

Основними модальностями темпоральної (часової) логіки є відомі ще з античних часів модальності "завжди було", "колись було", "завжди буде", "колись буде". Звідси отримуємо такі основні темпоральні модальні композиції (темпоральні оператори): $\Box\uparrow$ (завжди буде), $\Box\downarrow$ (завжди було), $\Diamond\uparrow$ (колись буде), $\Diamond\downarrow$ (колись було).

Темпоральні оператори $\Box\uparrow$, $\Box\downarrow$, $\Diamond\uparrow$, $\Diamond\downarrow$ пов'язані так:

$\neg\Diamond\uparrow P = \Box\uparrow\neg P$;

$\neg\Box\uparrow P = \Diamond\uparrow\neg P$;

$\neg\Diamond\downarrow P = \Box\downarrow\neg P$;

$\neg\Box\downarrow P = \Diamond\downarrow\neg P$.

Для темпоральних модальних систем *базовими* далі будемо вважати оператори $\Box_\uparrow$ та $\Box_\downarrow$. Тоді $\Diamond_\uparrow$ та $\Diamond_\downarrow$ є похідними темпоральними операторами й визначаються так:

$\Diamond_\uparrow P$ означає $\neg\Box_\uparrow\neg P$,

$\Diamond_\downarrow P$ означає $\neg\Box_\downarrow\neg P$.

Аксіоматичні системи пропозиційної темпоральної логіки. Розглянемо аксіоматичні системи темпоральної логіки на пропозиційному рівні. Мова таких систем є розширенням мови пропозиційної логіки.

Алфавіт мови: множина Ps предикатних символів, символи пропозиційних композицій $\neg$ і $\vee$, символи темпоральних операторів $\Box_\uparrow$, $\Box_\downarrow$.

Множина формул Fm визначається індуктивно:

1) кожний $P\in Ps$ є формулою; такі формули атомарні;

2) нехай Φ та Ψ – формули, тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $\Box_\uparrow\Phi$, $\Box_\downarrow\Phi$ – формули.

Символи $\Diamond_\uparrow$ та $\Diamond_\downarrow$ трактуємо як скорочення $\neg\Box_\uparrow\neg$ та $\neg\Box_\downarrow\neg$.

Приклад 9.2.1. Мінімальне темпоральне числення K_t є аналогом системи K.

Аксіомами K_t є аксіоми пропозиційної логіки та аксіоми, що задані такими схемами:

AxNr↑) $\Box_\uparrow(\Phi\to\Psi)\to(\Box_\uparrow\Phi\to\Box_\uparrow\Psi)$;

AxNr↓) $\Box_\downarrow(\Phi\to\Psi)\to(\Box_\downarrow\Phi\to\Box_\downarrow\Psi)$;

AxT↑) $\Phi\to\Box_\uparrow\Diamond_\downarrow\Phi$;

AxT↓) $\Phi\to\Box_\downarrow\Diamond_\uparrow\Phi$.

Аксіоми AxNr↑ та AxNr↓ є стандартними модальними аксіомами для $\Box_\uparrow$ та $\Box_\downarrow$.

Аксіоми AxT↑ та AxT↓ відображають принципи змішування часів.

Приклад 9.2.2. Темпоральне числення T_t є аналогом алетичної системи T.

Множина аксіом T_t складається з аксіом числення K_t та аксіом, що задаються схемами

Ax□↑) $\Box_\uparrow\Phi\to\Phi$;

Ax□↓) $\Box_\downarrow\Phi\to\Phi$.

Приклад 9.2.3. Темпоральне числення B_t є аналогом алетичної системи B.

Множина аксіом B_t складається з аксіом числення T_t та аксіом, що задаються схемами

AxB↑) $\Phi \to \Box_{\uparrow}\Diamond_{\uparrow}\Phi$;

AxB↓) $\Phi \to \Box_{\downarrow}\Diamond_{\downarrow}\Phi$.

Приклад 9.2.4. Темпоральне числення $S4_t$ є аналогом алетичної системи $S4$.

Множина аксіом $S4_t$ складається з аксіом числення T_t та аксіом, що задаються схемами

AxS4↑) $\Box_{\uparrow}\Phi \to \Box_{\uparrow}\Box_{\uparrow}\Phi$;

AxS4↓) $\Box_{\downarrow}\Phi \to \Box_{\downarrow}\Box_{\downarrow}\Phi$.

Приклад 9.2.5. Аналогом алетичної системи $S5$ є темпоральне числення $S5_t$.

Множина аксіом $S5_t$ складається з аксіом числення T_t та аксіом, що задаються схемами

AxS5↑) $\Diamond_{\uparrow}\Phi \to \Box_{\uparrow}\Diamond_{\uparrow}\Phi$;

AxS5↓) $\Diamond_{\downarrow}\Phi \to \Box_{\downarrow}\Diamond_{\downarrow}\Phi$.

Правила виведення темпоральних числень T_t, B_t, $S4_t$, $S5_t$ складаються із правил виведення пропозиційної логіки, до яких додаються правила модалізації для $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$:

ПМ↑) $\Phi \mid\!- \Box_{\uparrow}\Phi$;

ПМ↓) $\Phi \mid\!- \Box_{\downarrow}\Phi$.

Реляційна семантика темпоральної логіки задається так, як реляційна семантика алетичної логіки. Аналогічно поняттю моделі можливих світів уводимо поняття темпоральної моделі, але тепер $\rhd$ фактично вказує напрямок часу – від минулого до майбутнього.

Визначення відображення інтерпретації формул на світах $I : Fm \times S \to \{T, F\}$ має єдину відмінність від визначення I для алетичної модальної логіки: замість п. 4 маємо пп. 4↑ та 4↓ для формул вигляду $\Box_{\uparrow}\Phi$ і $\Box_{\downarrow}\Phi$:

4↑) $I(\Box_{\uparrow}\Phi, \alpha) = T \Leftrightarrow I(\Phi, \beta) = T$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$, інакше $I(\Box_{\uparrow}\Phi, \alpha) = F$;

4↓) $I(\Box_{\downarrow}\Phi, \alpha) = T \Leftrightarrow I(\Phi, \beta) = T$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\beta \rhd \alpha$, інакше $I(\Box_{\downarrow}\Phi, \alpha) = F$.

Різновиди темпоральних логік. Стисло опишемо різновиди темпоральних логік. У низці робіт (див., напр., [16, 33]) розглядались такі розширення мінімальної темпоральної логіки, моделі яких мають властивості фізичного часу (лінійність, дискретність чи континуальність, скінченність чи нескінченність, циклічність тощо). Популярними також є дослідження, присвячені метричним темпоральним логікам [33, 35, 36].

Класифікація систем темпоральної логіки наведена в [33].

Передусім виділяють *пропозиційні* та *першопорядкові* темпоральні логіки. Немодальною частиною цих логік є відповідно класичні пропозиційна та першопорядкова логіки.

У першопорядкових темпоральних логіках можна накладати різні обмеження на взаємодію кванторів і темпоральних операторів. У загальному випадку дозволяється модальний оператор в області дії квантора. *Обмежену* темпоральну логіку першого порядку отримують, заборонивши квантифікацію над темпоральними операторами. У деяких різновидах темпоральних логік виділяють *локальні* змінні, які можуть набувати різних значень на різних станах, і *глобальні* змінні, значення яких однакові для всіх станів.

Залежно від природи часу можна виділити *лінійні* й *розгалужені* темпоральні логіки.

Якщо вважати, що в кожен момент часу існує єдиний можливий наступний момент, тобто час має лінійний характер, то отримуємо системи темпоральної логіки з *лінійним* часом – лінійні темпоральні логіки (ЛТЛ). Темпоральні модальності тоді описують події вздовж єдиної лінії часу.

У ЛТЛ виділяють логіки з *однонаправленим* часом, або логіки майбутнього.

Іншим варіантом є розгалужений час. Тоді час має деревоподібну структуру: у кожен момент він може поділитися на альтернативні потоки, подаючи різні варіанти майбутнього. Отримуємо системи темпоральної логіки з *розгалуженим* часом, або розгалужені темпоральні логіки (РТЛ). Темпоральні модальності тут відбивають розгалужену природу часу.

Можна виділити темпоральні логіки з *дискретним* (виділяються окремі точки часу) та *неперервним* часом (час має неперервний, щільний характер). З останніх виділяють логіки, у яких стани часу мають інтервальний характер; такі *інтервальні* темпоральні логіки запропоновані Ч. Гембліном.

При введенні метрики в потоки часу отримуємо *метричні* темпоральні логіки.

Приклад 9.2.6. Мінімальне метричне темпоральне числення побудував А. Прайор [45]. Основними операторами цього числення є $\uparrow\boldsymbol{n}$ – "буде через *n* одиниць часу" та $\downarrow\boldsymbol{n}$ – "було *n* одиниць часу тому".

Неметричні часові оператори $\Box_\uparrow$, $\Box_\downarrow$, $\Diamond_\uparrow$, $\Diamond_\downarrow$ виражаються через $\uparrow\boldsymbol{n}$ та $\downarrow\boldsymbol{n}$:

$$\Box_\uparrow P = \forall n\,(\uparrow\boldsymbol{n}\,P);$$
$$\Diamond_\uparrow P = \exists n\,(\uparrow\boldsymbol{n}\,P);$$
$$\Box_\downarrow P = \forall n\,(\downarrow\boldsymbol{n}\,P);$$
$$\Diamond_\downarrow P = \exists n\,(\downarrow\boldsymbol{n}\,P).$$

Метричну темпоральну логіку узагальнив Д. Кліффорд [32]. Він увів потоки часу та відповідні часові оператори $\boldsymbol{\tau}\uparrow\boldsymbol{n}$ та $\boldsymbol{\tau}\downarrow\boldsymbol{n}$, які означають "у потоці $\boldsymbol{\tau}$ через *n* одиниць часу буде істинним" і "у потоці τ *n* одиниць часу тому було істинним", а також описав відповідні темпоральні числення.

Розглянемо детальніше лінійні та розгалужені темпоральні логіки. Для ЛТЛ відношення досяжності на світах (станах світу) має бути функціональним. Найпопулярнішим варіантом таких логік є ЛТЛ майбутнього (ЛТЛМ) (див. [41]). Моделлю часу в такій логіці є впорядкована структура, яка ізоморфна (N, ≤). Час вважається дискретним, він має початковий момент (для якого немає попереднього моменту) і нескінченно простягається в майбутнє. Темпоральними операторами такої логіки є $\Box$ (завжди) і $\Diamond$ (колись), які в цьому випадку відповідають традиційним темпоральним операторам $\Box_\uparrow$ та $\Diamond_\uparrow$, і метричний оператор $\Uparrow$ (у наступний момент), який називають next-оператором. При цьому можна задати $\Diamond P$ як $\neg\Box\neg P$.

Приклад 9.2.7. Мову пропозиційної ЛТЛМ можна задати аналогічно розглянутому вище випадку пропозиційної темпоральної логіки.

При цьому п. 2 індуктивного визначення формули мови буде таким:

2) нехай Φ та Ψ – формули, тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $\Box\Phi$ $\Diamond\Phi$, $\Uparrow\Phi$ – формули.

Реляційна модель для ЛТЛМ – це трійка $(N, \leq, I)$, де $I: Ps{\times}N \to \{T, F\}$.

Задамо відображення $J: Fm{\times}N \to \{T, F\}$ для модалізованих формул:

$J(\Box\Phi, t) = T \Leftrightarrow J(\Phi, s) = T$ для всіх $s \geq t$;

$J(\Uparrow\Phi, t) = J(\Phi, t{+}1)$.

Тоді маємо: $J(\Diamond\Phi, t) = T \Leftrightarrow J(\Phi, s) = T$ для деякого $s \geq t$.

Приклад 9.2.8. Аксіоматичні системи гільбертівського типу пропозиційної ЛТЛМ можна утворити шляхом поповнення аксіом і правил виведення пропозиційного числення правилом $\Phi \mid\!- \Box\Phi$ та схемами темпоральних аксіом:

– $\Box(\Phi\to\Psi) \to (\Box\Phi\to\Box\Psi)$;

– $\Diamond\Phi \leftrightarrow \neg\Box\neg\Phi$;

– $\Uparrow(\Phi\to\Psi) \to (\Uparrow\Phi\to\Uparrow\Psi)$;

– $\Box\Phi \to \Phi \,\&\, \Uparrow\Phi \,\&\, \Box\Uparrow\Phi$;

– $\Box\,(\Phi\to\Uparrow\Phi) \to (\Phi\to\Box\Phi)$;

– $\Uparrow\Phi \leftrightarrow \neg\Uparrow\neg\Phi$.

Існує багато різновидів ЛТЛМ [29, 33, 38]. У деяких варіантах темпоральні оператори діють тільки для опису *строгого* майбутнього. Іноді множину станів часу роблять обмеженою.

Загальнішим випадком є ЛТЛ із темпоральними операторами майбутнього й минулого часів. Такі ЛТЛ мають виразніші можливості. Відповідні класи ЛТЛ розглядаються також на першопорядковому рівні (першопорядкові ЛТЛ).

У темпоральних логіках із розгалуженим часом, або РТЛ, час має деревоподібну структуру – кожен його момент може мати багато наступних.

Зазвичай розглядають РТЛ майбутнього. У цих логіках структура часу відповідає нескінченному дереву, часова лінія вздовж кожного шляху в дереві ізоморфна (N, <). Кожна вершина дерева в загальному випадку допускає нескінченну кількість наступників, але не менше одного. Відношення досяжності $\triangleright$ у реляційних моделях РТЛ задовольняє умову: для кожного s існує t таке, що $s \triangleright t$. Розглядають окремі типи таких РТЛ, у яких допускаються тільки скінченні чи навіть обмежені розгалуження часу.

Відомими системами пропозиційних РТЛ є логіка дерева обчислень CTL (Computational Tree Logic) і повна логіка розгалуженого часу CTL* [33, 37].

Відомі також системи РТЛ першого порядку, отримані поєднанням відповідних систем пропозиційних РТЛ і логіки першого порядку [29, 33].

Запитання для самоконтролю

1. Назвіть базові темпоральні оператори.

2. Які співвідношення пов'язують темпоральні оператори $\Box_{\uparrow}$, $\Box_{\downarrow}$, $\Diamond_{\uparrow}$, $\Diamond_{\downarrow}$?

3. Опишіть алфавіт і дайте визначення формули мови пропозиційної темпоральної логіки.

4. Опишіть мінімальне темпоральне числення K_t.

5. Опишіть темпоральні числення T_t, B_t, $S4_t$, $S5_t$.

6. Як ми трактуємо відношення $\triangleright$ для випадку реляційної моделі темпоральної логіки?

7. Як задається значення формули у світі α для випадку темпоральної логіки?

8. Опишіть класифікацію систем темпоральної логіки.

9. Охарактеризуйте лінійні темпоральні логіки.

10. Охарактеризуйте розгалужені темпоральні логіки.

11. Наведіть оператори мінімальної метричної темпоральної логіки Прайора.

12. Як можна визначити неметричні часові оператори через метричні $\uparrow\boldsymbol{n}$ та $\downarrow\boldsymbol{n}$?

13. Опишіть мову пропозиційної ЛТЛМ.

Вправи

1. Дайте повний опис (схеми аксіом і правила виведення):
   1) пропозиційної темпоральної K_t-системи;
   2) пропозиційної темпоральної T_t-системи;
   3) пропозиційної темпоральної $S4_t$-системи;
   4) пропозиційної темпоральної $S5_t$-системи;
   5) пропозиційної темпоральної B_t-системи.
2. Дайте повний опис аксіоматичної системи пропозиційної ЛТЛМ.

9.3. Епістемічні та деонтичні логіки

Епістемічна логіка – це розділ модальної логіки, у якому досліджуються міркування з модальностями "відомо", "правильно", "доведено", "спростовано".

Засновником епістемічної логіки як науки є фінський логік Я. Хінтікка. У 1962 р. у роботі "Знання і опінія" він вирішив застосувати апарат модальної логіки для порівняльної логічної характеристики того, що є змістом знання і змістом опінії, віри. Для епістемічної логіки Я. Хінтікка запропонував семантику можливих світів, назвавши такі світи епістемічними.

Постулати епістемічної логіки описано, зокрема, у [4].

У цьому посібнику обмежимось розглядом найважливішого з практичного погляду різновиду епістемічної логіки – епістемічної логіки знання. У цьому випадку вводимо лише модальні оператори знання. Розглядаємо логіки пропозиційного рівня.

Епістемічна логіка знання. У найпростішому варіанті такої логіки маємо єдиний оператор знання **К**, що відповідає наявності єдиного суб'єкта знання (експерта, агента).

Алфавіт мови пропозиційної епістемічної логіки з одним експертом: множина Ps предикатних символів, символи пропозиційних композицій $\neg$ і $\vee$, символ К модального оператора знання.

Множина формул Fe визначається індуктивно:

1) кожний $P \in Ps$ є формулою; такі формули атомарні;

2) нехай Φ та Ψ – формули, тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $K\Phi$ – формули.

Множина аксіом у системах епістемічної логіки знання з одним експертом складається з аксіом пропозиційної логіки, до яких додаємо певні епістемічні аксіоми, що задаються схемами:

AxEN) $K(\Phi\to\Psi)\to(K\Phi\to K\Psi)$;

AxRe) $K\Phi\to\Phi$;

AxPR) $K\Phi\to KK\Phi$;

AxNR) $\neg K\Phi\to K\neg K\Phi$.

Аксіома AxRe називається *аксіомою реальності знання* ("якщо я знаю, то це справді так"). Вона є аналогом аксіоми Ax$\Box$ алетичної модальної логіки.

Аксіома AxPR називається *аксіомою позитивної рефлексії* ("якщо я знаю, то я знаю, що знаю"). Вона є аналогом аксіоми AxS4 алетичної модальної логіки.

Аксіома AxNR називається *аксіомою негативної рефлексії* ("якщо я не знаю, то я знаю, що не знаю"). Вона є аналогом аксіоми AxS5 алетичної модальної логіки.

Правила виведення в системах епістемічної логіки знання з одним експертом складаються із правил виведення пропозиційної логіки, до яких додається *правило знання*:

ПК) $\Phi \vdash K\Phi$.

Приклад 9.3.1. Система епістемічної логіки, що включає схеми аксіом AxEN та AxRe, є аналогом системи T алетичної модальної логіки. Таку систему називають $T_{(1)}$.

Приклад 9.3.2. Система епістемічної логіки, що включає схеми аксіом AxEN, AxRe та AxPR, є аналогом системи $S4$ алетичної модальної логіки. Таку систему називають $S4_{(1)}$.

Приклад 9.3.3. Система епістемічної логіки, що включає схеми аксіом AxEN, AxRe та AxNR, є аналогом системи $S5$ алетичної модальної логіки. Таку систему називають $S5_{(1)}$.

Реляційна семантика для аксіоматичних систем пропозиційної епістемічної логіки знання вводиться так, як для аксіоматичних систем алетичної модальної логіки.

Відношення досяжності $\rhd$ трактується так: $\alpha \rhd \beta$ означає, що експерт (агент) у ситуації α розглядає ситуацію β як можливу.

При цьому аксіома AxRe дає умову рефлексивності відношення досяжності $\triangleright$.

Аксіома AxPR дає умову транзитивності $\triangleright$.

Аксіома AxNR дає умову транзитивності й симетричності $\triangleright$.

Узагальненням епістемічної логіки знання з одним експертом є епістемічна логіка знання з n експертами. У цьому випадку вводимо скінченну множину операторів знання $К_1, \ldots, К_n$. Відповідно визначається мова логіки. Аксіоматичні системи епістемічної логіки знання з n експертами замість однієї схеми аксіом AxEN містять n схем аксіом такого самого типу для $К_1, \ldots, К_n$. Те саме стосується схем аксіом AxRe, AxPR, AxNR.

Системи пропозиційної епістемічної логіки знання з n експертами (агентами), відповідні до систем $T_{(1)}$, $S4_{(1)}$, $S5_{(1)}$, називають $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$.

При визначенні реляційної семантики таких систем замість єдиного відношення $\triangleright$ маємо n відношень $\triangleright_1, \ldots, \triangleright_n$. При цьому $\alpha \triangleright_k \beta$ означає, що k-й експерт (агент) у ситуації α розглядає ситуацію β як можливу.

На базі епістемічних логік розроблено мови опису систем знань із неповною інформацією, що дозволяє не тільки робити запити бази знань, але й мати інформацію про повноту чи неповноту отриманих знань. Детальніше про це див., зокрема, в [1].

Деонтична логіка. Деонтична логіка – це розділ модальної логіки, у якому вивчають міркування з термінами "обов'язково", "дозволено", "заборонено". Деонтичну логіку називають також логікою норм, її предметом є нормативні міркування. Сам термін "деонтична" походить від давньогрецького deontis, що означає "так як має бути", "належним чином".

Творцем сучасної деонтичної логіки є Г. фон Врігт, який у 1951 р. сформулював проблеми деонтичної логіки й навів їх розв'язки. Подальший розвиток деонтична логіка отримала в роботах С. Кангера, А. Андерсона, А. Прайора та ін.

Зауважимо, що сама можливість побудови деонтичної логіки сумнівна з погляду багатьох логіків і філософів. На їхню думку, логіка має справу з реченнями, які є істинними або хибними. Однак деонтичні (нормативні) речення не є ні істинними, ні хибними, тому що належать не реальному, а ідеальному "світу належного".

Побудову деонтичної логіки природно здійснювати на базі семантики можливих світів. Поняття деонтичного світу введено ще Е. Кантом. Він запропонував класичну інтерпретацію можливого світу як деонтичного. Кант визначив моральний світ як світ, що відповідає всім модальним законам, яким він може бути згідно з волею розумних істот і яким має бути згідно із законами моральності. На думку Канта, моральний світ – це ідеальний світ, один з варіантів можливого світу, де все ідеально діє і взаємодіє. Тому, узагальнюючи, деонтичний світ – це світ, який ми хотіли б мати.

Кант постулював існування єдиного модального світу, але деонтична логіка допускає існування багатьох світів. Наприклад, кілька деонтичних світів можна трактувати як різні проєкти законів, що розглядаються Верховною Радою.

Концепцію семантики можливих світів для деонтичної логіки можна конкретизувати у двох аспектах:

1) можливий світ – це деонтичний світ;

2) відношення досяжності – це відношення між світом, у якому будується деонтичний світ, і цим деонтичним світом.

У мінімальному (стандартному) варіанті деонтичної логіки маємо базовий деонтичний оператор **O** – "обов'язково".

Приклад 9.3.4. Похідні деонтичні оператори визначаються так (тут Q – предикат):

1) оператор **P** – "дозволено": $\mathbf{P}Q$ означає $\neg\mathbf{O}\neg Q$;

2) оператор **F** – "заборонено": $\mathbf{F}Q$ означає $\mathbf{O}\neg Q$;

3) оператор **I** – "байдуже": $\mathbf{I}Q$ означає $\mathbf{P}Q \,\&\, \mathbf{P}\neg Q$.

Мову деонтичної логіки вводимо стандартно.

Приклад 9.3.5. Пропозиційна аксіоматична деонтична система *DS*.

Множина аксіом і правил виведення системи *DS* складається з аксіом і правил виведення пропозиційної логіки, до яких додаємо деонтичні аксіоми, що є аналогами аксіом AxNr та Ax□, і правило виведення П**O**, що є аналогом правила модалізації.

Деонтичні аксіоми системи *DS* задаються схемами:

AxDNr) $\mathbf{O}(\Phi\to\Psi)\to(\mathbf{O}\Phi\to\mathbf{O}\Psi)$;

AxD□) $\mathbf{O}\Phi\to\mathbf{P}\Phi$.

Правило виведення П**O**:

П**O**) $\Phi \vdash \mathbf{O}\Phi$.

Властивості оператора **O** подібні до властивостей $\square$.

Водночас у деонтичній логіці формула $\mathbf{O}\Phi\to\Phi$ у загальному випадку не є істинною. Вона означає: "якщо має бути Φ, то Φ".

На відміну від відношення досяжності алетичної модальної логіки, у деонтичній логіці відношення досяжності $\rhd$ має бути:

1) іррефлексивним, тобто неможливим є $\alpha \rhd \alpha$;

2) мати властивість незавершеності, тобто для кожного світу α існує світ β такий: $\alpha \rhd \beta$.

Ці властивості можна трактувати як незбіг належного й реального та як існування для кожного світу свого деонтичного світу.

У деонтичній логіці існують твердження, інтуїтивно неприйнятні, але які можна формально довести в описаній системі. Це засвідчує не зовсім адекватну формалізацію деонтичної логіки.

Приклад 9.3.6. А. Прайор показав, що теоремою є формула $\mathbf{O}\neg\Phi\to\mathbf{O}(\Phi\to\Psi)$, але вона інтуїтивно неприйнятна, адже її можна інтерпретувати так: у корпусі факультету заборонено палити, отже, якщо ви палите, то можна вбивати. Це дає підстави сумніватися у трактуванні Г. фон Врігтом формули $\mathbf{O}(\Phi\to\Psi)$ як твердження про похідний обов'язок: зробити Ψ у разі виконання Φ.

Приклад 9.3.7. А. Прайор запропонував визначати похідний обов'язок формулою $\Phi\to\mathbf{O}\Psi$, але тоді теоремою буде $\neg\Phi\to(\Phi\to\mathbf{O}\Psi)$, яка парадоксальна, тому що означає: те, що не існує, зобов'язує робити все, що завгодно.

Приклад 9.3.8. Формула $\mathbf{F}\Phi\to\mathbf{F}(\Phi\&\Psi)$ також є парадоксальною. Ця формула означає: із заборони дії випливає заборона поєднувати її з іншою дією. Це правильно, зокрема, і для дії, що компенсує порушення заборонної дії. Наприклад, якщо заборонено лаятися, то заборонено лаятися й вибачатися.

Побудова кванторних деонтичних логік зіштовхується з низкою принципових труднощів.

Приклад 9.3.9. Формули $\mathbf{O}\exists x\neg\Phi(x)$ та $\neg\mathbf{P}\forall x\Phi(x)$ еквівалентні, але за деонтичною сутністю вони різні. Перша формула стверджує, що обов'язково існує індивід, який виконує $\neg\mathbf{\Phi}$, друга – що не дозволено кожному виконувати $\mathbf{\Phi}$.

Різновидом деонтичної логіки є *логіка санкцій*, запропонована А. Андерсоном (див. [4]). У цій логіці деонтичний оператор **O** виражається за допомогою оператора $\Box$ і константного предиката **S**, який означає санкцію (штраф).

$\mathbf{O}Q$ визначається як $\Box(\neg Q \to \mathbf{S})$, тоді $\mathbf{F}Q$ означає $\Box(Q \to \mathbf{S})$, $\mathbf{I}Q$ означає $\Box(Q \,\&\, \neg\mathbf{S})$.

Відповідне числення *Sd* логіки санкцій включає аксіому $\neg\Box\mathbf{S}$, яка означає, що кари можна уникнути.

Приклад 9.3.10. Варіантом логіки санкцій є [4] деонтична логіка з нормативним кодексом – предикатною константою **N**.

$\mathbf{O}Q$ задається як $\Box(\mathbf{N} \to Q)$, $\mathbf{F}Q$ – як $\Box(\mathbf{N} \to \neg Q)$, $\mathbf{P}Q$ – як $\mathbf{N}\&Q$. Відповідне числення включає аксіому $\Diamond\mathbf{N}$, яка означає можливість дотримання нормативного кодексу.

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає епістемічна логіка?
2. Опишіть мову епістемічної логіки знання з одним експертом.
3. Назвіть аксіоми:
   – реальності знання;
   – позитивної рефлексії;
   – негативної рефлексії.
4. Аналогом яких систем атлетичної логіки є епістемічні системи $T_{(1)}$, $S4_{(1)}$, $S5_{(1)}$?
5. Як визначається реляційна семантика епістемічної логіки знання з одним експертом?
6. Як трактується відношення досяжності в реляційній семантиці епістемічної логіки?
7. Як пов'язані аксіоми AxRe, AxPR, AxNR та властивості відношення досяжності?
8. Опишіть мову епістемічної логіки знання з n експертами.
9. Опишіть аксіоматичні системи епістемічної логіки знання з n експертами $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$.

10. Які особливості реляційної семантики епістемічної логіки знання з *n* експертами?

11. Що вивчає деонтична логіка?

12. Що таке деонтичний світ?

13. Які особливості концепції семантики можливих світів для деонтичної логіки?

14. Які ви знаєте деонтичні оператори?

15. Опишіть мову деонтичної логіки.

16. Опишіть деонтичну систему *DS*.

17. Які властивості відношення досяжності в реляційній семантиці деонтичної логіки?

18. Чи можна вважати цілком адекватною формалізацію деонтичної логіки?

19. Які особливості має логіка санкцій Андерсона?

20. Що таке деонтична логіка з нормативним кодексом?

Вправи

1. Дайте повні описи пропозиційних епістемічних систем $T_{(1)}$, $S4_{(1)}$, $S5_{(1)}$.

2. Дайте повні описи пропозиційних епістемічних систем $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$.

3. Укажіть схеми аксіом і правила виведення:
   - пропозиційної епістемічної $S4_{(2)}$-системи;
   - пропозиційної епістемічної $S4_{(3)}$-системи;
   - пропозиційної епістемічної $S5_{(2)}$-системи;
   - пропозиційної епістемічної $S5_{(3)}$-системи.

4. Визначте реляційну семантику систем $T_{(1)}$, $S4_{(1)}$, $S5_{(1)}$).

5. Визначте реляційну семантику систем $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$.

6. Дайте явний опис мови деонтичної логіки.

7. Чому деонтична формула $x = y \rightarrow \mathbf{0}\, x = y$ парадоксальна?

8. Дайте повне описання пропозиційного числення *Sd* логіки санкцій Андерсона.

9. Покажіть, що в численні *Sd*:

   а) $\vdash \mathbf{O}\mathrm{A} \rightarrow \mathbf{P}\mathrm{A}$;

   б) $\vdash \mathbf{O}(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \rightarrow (\mathbf{O}\mathrm{A} \rightarrow \mathbf{O}\mathrm{B})$.

9.4. Композиційно-номінативні модальні логіки часткових предикатів

Синтезуючи можливості традиційних модальних логік та логік часткових квазіарних предикатів, отримуємо *композиційно-номінативну модальну логіку* (КНМЛ). Ураховуючи аспект зміни й розвитку предметних областей, акцентуємо увагу на КНМЛ, які описують переходи від одного стану світу до іншого – *транзиційних* КНМЛ. Такі логіки досліджувались, зокрема, в [11, 22–25].

Центральним поняттям КНМЛ є поняття *композиційно-номінативної модальної системи* (КНМС). КНМС – це об'єкт вигляду $\boldsymbol{M} = (Cms, Ds, Dns)$, де:

Cms – композиційна модальна система, задає семантичні аспекти світу;

Ds – дескриптивна система, визначає множину стандартних дескрипцій – множину Fm формул мови КНМЛ;

Dns – денотаційна система, яка визначає значення стандартних дескрипцій (формул мови) на семантичних моделях; задається відображенням інтерпретації Im.

Композиційні модальні системи можна віднести до семантичних моделей реляційного типу, вони мають вигляд $Cms = (S, R, Pr, C)$, де:

S – множина станів світу;

R – множина відношень на S вигляду $R \subseteq S \times S^n$;

Pr – множина предикатів на станах світу;

C – множина композицій на Pr; визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня й базовими модальними композиціями.

Для КНМЛ номінативних рівнів поняття КНМС уточнюється [22] так. Множину станів світу S конкретизуємо як множину алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де A_α – множина базових даних стану α, Pr_α – множина квазіарних предикатів вигляду ${}^V\!A_\alpha \to \{T, F\}$, це предикати стану α. Предикати вигляду ${}^V\!A \to \{T, F\}$, де $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$, назвемо глобальними.

Далі обмежимося розглядом КНМЛ кванторного рівня чистих першопорядкових КНМЛ. Композиції таких КНМЛ визначаються базовими загальнологічними композиціями $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ і базовими модальними композиціями.

Мови КНМЛ. Опишемо мову КНМЛ кванторного рівня. Алфавіт мови:

– множина V предметних імен;

– множина Ps предикатних символів – загальнологічна сигнатура;

– $Cs = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ – множина символів базових загальнологічних композицій;

– множина Ms символів базових модальних композицій – модальна сигнатура.

Задамо множину Fm формул мови.

Маємо $Ps \subseteq Fm$; такі $p \in Ps$ – *атомарні* формули; далі задаємо індуктивно:

FP) $\Phi, \Psi \in Fm \Rightarrow \neg\Phi \in Fm$ та $\vee\Phi\Psi \in Fm$;

FR) $\Phi \in Fm \Rightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in Fm$;

F$\exists$) $\Phi \in Fm \Rightarrow \exists x\Phi \in Fm$;

FM) $\Phi \in Fm$ та $\text{⌘} \in Ms \Rightarrow \text{⌘}\Phi \in Fm$.

У множині V виділимо підмножину $V_T \subseteq V$ імен, гарантовано неістотних для всіх $p \in Ps$, – тотально неістотних імен.

Для визначення множин гарантовано (строго) неістотних для формул імен задамо функцію $\nu : Fr \to 2^V$:

– $\nu(p) = V_T$ для всіх $p \in Ps$;

– $\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi)$;

– $\nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi) \cap \nu(\Psi)$;

– $\nu(R_{x_1,\ldots,x_n}^{v_1,\ldots,v_n}\Phi) = (\nu(\Phi) \cup \{v_1,\ldots,v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin \nu(\Phi)_{i \in 1,\ldots,n}\}$;

– $\nu(\exists x\Phi) = \nu(\Phi) \cup \{x\}$;

– $\nu(\text{⌘}\Phi) = \nu(\Phi)$.

Тип кванторної КНМС визначається її модальною сигнатурою Ms, однотипністю відношень із $\boldsymbol{R}$ для кожного $\text{⌘} \in Ms$ і сигнатурою синтетичної неістотності $\sigma = (Ps, \nu)$.

У випадку КНМЛ еквітонних предикатів для визначення множин гарантовано слабко неістотних для формул імен аналогічно функції ν задаємо функцію $\mu : Fr \to 2^{V}$.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на станах світу $Im : Ps \times S \to Pr$, при цьому має виконуватись умова $Im(p, \alpha) \in Pr_{\alpha}$. Таке Im продовжимо до відображення інтерпретації формул на світах $Im : Fm \times S \to Pr$.

IP) $Im(\neg\Phi, \alpha) = \neg(Im(\Phi, \alpha))$;

$Im(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Im(\Phi, \alpha), Im(\Psi, \alpha))$;

IR) $Im(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \alpha) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Im(\Phi, \alpha))$;

I∃) $Im(\exists x\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо існує } a \in A_{\alpha}\text{: } Im(\Phi, \alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T, \\ F, \text{ якщо } Im(\Phi, \alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_{\alpha}, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

IM) $Im(⌘\Phi, \alpha)(d)$ визначається значеннями $Im(\Phi, \delta)(d)$ для певних станів δ таких, що α та ці δ перебувають у відповідних, пов'язаних із ⌘, відношеннях із R.

Таким чином, КНМС можна уточнити як об'єкт вигляду $\boldsymbol{M} = ((S, R, Pr, C), Fm, Im)$.

Предикат $Im(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_{α}.

Формула Φ неспростовна у стані $\alpha \in S$ (позн. $\alpha \models \Phi$), якщо предикат Φ_{α} неспростовний.

Формула Φ неспростовна в КНМС $\boldsymbol{M}$, або частково істинна в КНМС $\boldsymbol{M}$ (позн. $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо $\alpha \models \Phi$ для всіх $\alpha \in S$.

Нехай $\boldsymbol{\tau}$ – клас КНМС певного типу.

Формула Φ τ-неспростовна (позн. $\boldsymbol{M}_{\tau} \models \Phi$), якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{\tau}$.

Якщо $\boldsymbol{\tau}$ мається на увазі, то пишемо просто $\models \Phi$.

Транзиційні модальні системи. Важливим класом КНМС є *транзиційні* модальні системи (ТМС). Вони є основою транзиційних КНМЛ (ТМЛ), у межах яких природно можуть розглядатися традиційні модальні логіки – алетичні, темпоральні, епістемічні, деонтичні тощо.

Окремими випадками ТМС є загальні транзиційні, темпоральні, мультимодальні системи.

ТМС – це КНМС, у яких множина R складається з відношень вигляду $\mathrm{R} \subseteq S \times S$. Ці відношення трактуємо як відношення переходу на станах.

ТМС, у яких $R = \{\rhd\}$, а базовою модальною композицією є $\Box$ ("необхідно"), називають *загальними* (ЗМС).

ТМС, у яких $R = \{\rhd\}$, а базовими модальними композиціями є $\Box\uparrow$ ("завжди буде") і $\Box\downarrow$ ("завжди було"), називають *темпоральними* (ТмМС).

ТМС із $R = \{\rhd_i \mid i \in I\}$ та базовими модальними композиціями K_i, $i \in I$, у яких кожному $\rhd_i \in R$ зіставлена відповідна модальна композиція K_i, назвемо *мультимодальними* (ММС).

ЗМС є окремим випадком ММС, для них R складається з єдиного бінарного відношення $\rhd$ та наявна єдина базова модальна композиція К, за дією ідентична $\Box$.

Для ММС дія кожної K_i аналогічна дії $\Box$, але тільки щодо свого відношення $\rhd_i$, $i \in I$.

Для ЗМС традиційно задають дуальну композицію $\Diamond$ ("можливо"): $\Diamond P$ означає $\neg\Box\neg P$.

Для ТмМС задають дуальні композиції $\Diamond\uparrow$ ("колись буде") і $\Diamond\downarrow$ ("колись було"): $\Diamond\uparrow P$ означає $\neg\Box\uparrow\neg P$; $\Diamond\downarrow P$ означає $\neg\Box\downarrow\neg P$.

ТМС номінативних рівнів будемо також подавати у вигляді $\boldsymbol{M} = (S, R, A, Im)$, де $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$.

Приклад 9.4.1. Опишемо мову чистих першопорядкових ЗМС. Алфавіт мови:

– множина V предметних імен;

– множина Ps предикатних символів;

– множини символів базових композицій $Cs = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ та $Ms = \{\Box\}$.

Множину Fm формул мови визначаємо згідно з наведеними вище пп. FP, FR, F∃, а п. FM уточнимо так:

F$\Box$) $\Phi \in Fm \Rightarrow \Box\Phi \in Fm$.

Для запису скорочень формул також використовуємо символи похідних композицій $\to$, &, $\leftrightarrow$, $\forall x$ та $\Diamond$. Наприклад, $\Diamond\Phi$ означає $\neg\Box\neg\Phi$. Такі скорочення теж називаємо формулами.

При визначенні відображення *Im* для формул вигляду $\Box\Phi$ п. IM уточнимо як I$\Box$ таким чином:

$$Im(\Box\Phi,\alpha)(d)=\begin{cases}T,\ \text{якщо } Im(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S:\ \alpha\rhd\delta,\\ F,\ \text{якщо існує } \delta\in S:\alpha\rhd\delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d)=F,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Якщо для $\alpha\in S$ не існує такого β, що $\alpha\rhd\beta$, то для кожного $d\in {}^{V}\!A$ вважаємо $Jm(\Box\Phi,\alpha)(d)\uparrow$.

Приклад 9.4.2. Опишемо мову чистих першопорядкових ТмМС. Алфавіт мови:

– множина *V* предметних імен;

– множина *Ps* предикатних символів;

– множини символів базових композицій $Cs=\{\neg,\vee,R_{\bar{x}}^{\bar{v}},\exists x\}$ та $Ms=\{\Box_{\uparrow},\Box_{\downarrow}\}$.

Множину *Fm* формул мови визначаємо згідно з наведеними вище пп. FP, FR, F$\exists$, а п. FM уточнимо так:

F$\Box_{\uparrow\downarrow}$) $\Phi\in Fm\Rightarrow\Box_{\uparrow}\Phi\in Fm$ та $\Box_{\downarrow}\Phi\in Fm$.

Для запису скорочень формул також використовуємо символи похідних композицій $\to$, &, $\leftrightarrow$, $\forall x$ та $\Diamond_{\uparrow}$, $\Diamond_{\downarrow}$.

Наприклад, $\Diamond_{\uparrow}\Phi$ та $\Diamond_{\downarrow}\Phi$ означають $\neg\Box_{\uparrow}\neg\Phi$ та $\neg\Box_{\downarrow}\neg\Phi$.

При визначенні відображення *Im* для формул $\Box_{\uparrow}\Phi$ та $\Box_{\downarrow}\Phi$ п. IM уточнимо як I$\Box_{\uparrow\downarrow}$ таким чином:

$$Im(\Box_{\uparrow}\Phi,\alpha)(d)=\begin{cases}T,\ \text{якщо } Im(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S:\ \alpha\rhd\delta,\\ F,\ \text{якщо існує } \delta\in S:\alpha\rhd\delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d)=F,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

$$Im(\Box_{\downarrow}\Phi,\alpha)(d)=\begin{cases}T,\ \text{якщо } Im(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S:\ \delta\rhd\alpha,\\ F,\ \text{якщо існує } \delta\in S:\delta\rhd\alpha \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d)=F,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Якщо для $\alpha\in S$ не існує β: $\alpha\rhd\beta$, то $Im(\Box_{\uparrow}\Phi,\alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d\in {}^{V}\!A$.

Якщо для $\alpha\in S$ не існує β: $\beta\rhd\alpha$, то $Im(\Box_{\downarrow}\Phi,\alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d\in {}^{V}\!A$.

Приклад 9.4.3. Опишемо мову чистих першопорядкових ММС. Алфавіт мови:

– множина V предметних імен;

– множина Ps предикатних символів;

– множини символів базових композицій $Cs = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ та $Ms = \{\mathrm{K}_i \mid i \in I\}$.

Множину Fm формул мови визначаємо згідно з наведеними вище пп. FP, FR, F∃, а п. FM уточнимо так:

FK) $\Phi \in Fm$ та $\mathrm{K}_i \in Ms \Rightarrow \mathrm{K}_i \Phi \in Fm$.

При визначенні відображення Im для формул вигляду $\mathrm{K}_i \Phi$ п. IM уточнимо як IK таким чином:

$$Im(\mathrm{K}_i \Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \ \alpha \rhd_i \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \alpha \rhd_i \delta \text{ та } Im(\Phi, \delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для $\alpha \in S$ не існує такого β, що $\alpha \rhd_i \beta$, то $Im(\Box\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d \in {}^V A$.

Залежно від умов, накладених на $\rhd$, можна визначати різні класи ЗМС та ТмМС. Традиційно розглядають випадки, коли $\rhd$ може бути рефлексивним, симетричним, транзитивним.

Якщо $\rhd$ рефлексивне, то в назві ЗМС та ТмМС пишемо символ R; якщо $\rhd$ транзитивне, то пишемо символ T; якщо $\rhd$ симетричне, то пишемо S.

Отримуємо такі типи ЗМС:

R-ЗМС, *T*-ЗМС, *S*-ЗМС, *RT*-ЗМС, *RS*-ЗМС, *TS*-ЗМС, *RTS*-ЗМС.

Відповідно маємо такі типи ТмМС:

R-ТмМС, *T*-ТмМС, *S*-ТмМС, *RT*-ТмМС,

RS-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС.

Якщо $\rhd$ симетричне, то $Im(\Box_{\uparrow}\Phi, \alpha)(d) = Im(\Box_{\downarrow}\Phi, \alpha)(d)$ для всіх α, d. Це означає, що дія композицій $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$ ідентична, це фактично композиція $\Box$.

Отже, якщо $\rhd$ симетричне, то типи *S*-ТмМС, *RS*-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС ідентичні відповідно типам *S*-ЗМС, *RS*-ЗМС, *TS*-ЗМС, *RTS*-ЗМС.

Зауважимо, що R-ЗМС, RS-ЗМС, RT-ЗМС, RTS-ЗМС подібні відповідно до класичних T-модельної, B-модельної, $S4$-модельної та $S5$-модельної структур.

Залежно від властивостей відношень $\rhd_i$ можна визначати різні класи ММС. Розглянемо випадки, коли $\rhd_i$ можуть бути рефлексивними, симетричними чи транзитивними, причому всі $\rhd_i$ однотипні. Якщо всі $\rhd_i$ рефлексивні, то в назві ММС пишемо символ R; якщо всі $\rhd_i$ транзитивні, то пишемо T; якщо всі $\rhd_i$ симетричні, то пишемо S.

Отримуємо такі чисті типи ММС:

R-ММС, T-ММС, S-ММС, RT-ММС, RS-ММС, TS-ММС, RTS-ММС.

ММС зі скінченними множинами однотипних відношень $\rhd_i$ назвемо *епістемічними*, або ММС епістемічного типу. Загальні ТМС є окремим випадком епістемічних ММС.

Традиційні системи епістемічної логіки знання можна природно розглядати в межах ММС епістемічного типу.

Зокрема, R-ММС, RT-ММС, RTS-ММС є узагальненнями відповідно епістемічних $T_{(n)}$-, $S4_{(n)}$-, $S5_{(n)}$-систем.

Приклад 9.4.4. Для ММС можливі набагато складніші, змішані типи.

Наприклад, відношення $\rhd_1$ транзитивне, відношення $\rhd_2$ транзитивне й рефлексивне, $\rhd_3$ симетричне тощо.

За умови $d \notin {}^V\!A_\delta$ постає питання: як задати значення $\Phi_\delta(d)$? Залежно від відповіді на нього можна виділити ТМЛ із сильною умовою та із загальною умовою визначеності на станах.

Нехай при $d \notin {}^V\!A_\delta$ маємо $\Phi_\delta(d)\uparrow$. Це рівносильно умові $\Phi_\delta(d)\downarrow \Rightarrow d \in {}^V\!A_\delta$. Така властивість – це *сильна умова визначеності на станах* [22]. ТМС із такою умовою назвемо St-ТМС.

Конкретизуючи, отримуємо St-ЗМС, St-ТмМС та St-ММС.

У випадку загальних St-ТМС із $(\Box\Phi)_\alpha(d) = T$ випливає $d \in {}^V\!A_\delta$ для всіх δ таких, що $\alpha \rhd \delta$. Це означає: базові об'єкти (базові дані) не можуть зникати при переході до стану-наступника.

Проте сильна умова визначеності на станах занадто обмежувальна. За цієї умови також порушується еквітонність предикатів при дії модальних композицій.

Приклад 9.4.5 (див. [22]). Задамо St-ЗМС таку: $S=\{\alpha,\beta\}$, $R=\{\alpha\triangleright\beta\}$, $A_\alpha=\{a,b\}$, $A_\beta=\{b\}$ та $d=[x\mapsto b]$, $d'=[x\mapsto b, y\mapsto a]$. Задамо $p_\alpha(d)=T$, $p_\alpha(d')=T$, $p_\beta(d)=T$.

Нехай предикати p_α та p_β еквітонні. Згідно з $d'\notin {}^VA_\beta$ маємо $p_\beta(d')\uparrow$. Отже, маємо $d\subset d'$, $(\Box p)_\alpha(d)=T$ та $(\Box p)_\alpha(d')\uparrow$, що суперечить еквітонності предиката $(\Box p)_\alpha$.

Більш природною здається *загальна умова визначеності на станах*:

за умови $d\notin {}^VA_\delta$ задаємо $\Phi_\delta(d)=\Phi_\delta(d_\delta)$.

Тут d_δ – позначення ІМ $[v\mapsto a\in d\,|\,a\in A_\delta]$.

Неформально це означає, що предикати стану δ "відчувають" лише компоненти вигляду $v\mapsto a$ з базовими даними $a\in A_\delta$. Звідси випливає, що у випадку ТМС із загальною умовою визначеності на станах маємо $\Phi_\delta(d)=\Phi_\delta(d_\delta)$ для всіх $d\in {}^VA$.

Базові модальні композиції ТМС із загальною умовою визначеності на станах уже зберігають (див. [22]) еквітонність.

За умовчанням далі будемо говорити про ТМС із загальною умовою визначеності на станах.

Взаємодія модальних композицій ТМС із реномінаціями та кванторами. Обмежимось розглядом ЗМС. Аналогічні твердження формулюються для ТмМС та ММС.

Символи модальних композицій можна проносити (див. [22, 24]) через реномінації.

Теорема 9.4.1. Для довільних Φ, $\alpha\in St$, $d\in {}^VA$ маємо

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Box\Phi_\alpha(d)=\Box\,R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi_\alpha(d).$$

Наслідок 9.4.1. Кожна формула вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)\leftrightarrow\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ неспростовна.

Розглянемо взаємодію модальних композицій та кванторів.

Теорема 9.4.2 (див. [11, 22]). Формули $\exists x\Box\Phi\to\Box\exists x\Phi$ та $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ є неспростовними у випадку ЗМС еквітонних предикатів.

Наслідок 9.4.2. Формули $\Diamond\forall x\Phi\to\forall x\Diamond\Phi$ та $\exists x\Diamond\Phi\to\Diamond\exists x\Phi$ неспростовні у випадку ЗМС еквітонних предикатів.

Це вже не так [24] для загального випадку ЗМС зі знятою умовою еквітонності.

Приклад 9.4.6. Формула вигляду $\exists x\Box\Phi\to\Box\exists x\Phi$ спростовна.

Побудуємо ЗМС, у якій спростовується $\exists x\Box\Phi\to\Box\exists x\Phi$. Нехай $St=\{\alpha,\beta\}$, $R=\{\alpha\rhd\beta\}$, $A_\alpha=\{a,b\}$, $A_\beta=\{b\}$. Нехай для $p\in Ps$ неістотні всі імена, крім x, y. Маємо $[x\mapsto a, y\mapsto b]_\beta=[y\mapsto b]$.

Задамо $p_\beta([y\mapsto b])=T$, $p_\beta([x\mapsto b, y\mapsto b])=F$. Ураховуючи $A_\beta=\{b\}$, із $p_\beta([x\mapsto b, y\mapsto b])=F$, маємо $\exists xp_\beta([y\mapsto b])=F$, тому $\Box\exists xp_\alpha([y\mapsto b])=F$. Із $p_\beta[x\mapsto a, y\mapsto b]_\beta=p_\beta[y\mapsto b]=T$ отримуємо $\Box p_\alpha([x\mapsto a, y\mapsto b])=T$, звідки $\exists x\Box p_\alpha([y\mapsto b])=T$. Отже, $(\exists x\Box p\to\Box\exists xp)_\alpha([y\mapsto b])=F$, тому $\alpha\,|\!\neq\exists x\Box p\to\Box\exists xp$.

Приклад 9.4.7. Формула вигляду $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ спростовна.

Побудуємо ЗМС, у якій спростовується $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$. Нехай $St=\{\alpha,\beta\}$, $R=\{\alpha\rhd\beta\}$, $A_\alpha=\{a\}$, $A_\beta=\{b\}$. Маємо $[x\mapsto a]_\beta=\varnothing$. Нехай для $p\in Ps$ неістотні всі імена, крім x. Задамо $p_\alpha(\varnothing)=F$, $p_\beta(\varnothing)=F$, $p_\beta([x\mapsto b])=T$. Тоді $\forall xp_\beta(\varnothing)=T$, звідки $\Box\forall xp_\alpha(\varnothing)=T$. Згідно з $[x\mapsto a]_\beta=\varnothing$ маємо $p_\beta([x\mapsto a])=p_\beta([x\mapsto a]_\beta)=$ $=p_\beta(\varnothing)=F$, тому $\Box p_\alpha([x\mapsto a])=F$. Звідси $\forall x\Box p_\alpha(\varnothing)=F$. Отже, отримали $(\Box\forall xp\to\forall x\Box p)_\alpha(\varnothing)=F$, тому $\alpha\,|\!\neq\Box\forall xp\to\forall x\Box p$.

Зауважимо, що у ЗМС прикладів 9.4.6 та 9.4.7 предикат p_β нееквітонний.

Наслідок 9.4.3. Для ЗМС немонотонних (нееквітонних) предикатів формули вигляду $\exists x\Box\Phi\to\Box\exists x\Phi$, $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ та $\Diamond\forall x\Phi\to\forall x\Diamond\Phi$, $\exists x\Diamond\Phi\to\Diamond\exists x\Phi$ не є неспростовними.

Приклад 9.4.8. Формули $\Box\exists x\Phi\to\exists x\Box\Phi$ та $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$ спростовні [11, 22] уже для ЗМС еквітонних предикатів.

Побудуємо ЗМС еквітонних предикатів, у якій спростовуються зазначені формули.

Нехай $St=\{\alpha, \beta\}$, $R=\{\alpha \triangleright \beta\}$, $A_\alpha=\{a\}$, $A_\beta=\{a, b\}$. Нехай для $p, q\in Ps$ неістотні всі імена, крім x.

Задамо $p_\alpha([x\mapsto a])=F$, $p_\beta([x\mapsto a])=F$, $p_\beta([x\mapsto b])=T$. З умови $p_\beta([x\mapsto a])=F$ маємо $(\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$, звідки, згідно з $A_\alpha=\{a\}$, отримуємо $(\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$. Згідно з $p_\beta([x\mapsto b])=T$ маємо $(\exists x\, p)_\beta([x\mapsto a])=T$, звідки $(\Box\exists x\, p)_\alpha([x\mapsto a])=T$. Таким чином, $(\Box\exists x\, p\to\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$, тому $\alpha\,|\!\neq \Box\exists x\, p\to\exists x\Box p$.

Задамо $q_\alpha([x\mapsto a])=T$, $q_\beta([x\mapsto a])=T$, $q_\beta([x\mapsto b]])=F$. З умови $p_\beta([x\mapsto a])=F$, тоді $(\forall x\, q)_\beta([x\mapsto a])=F$, звідки маємо $(\Box\forall x\, q)_\alpha([x\mapsto a])=F$. Маємо $R=\{\alpha \triangleright \beta\}$, тому $q_\beta([x\mapsto a])=T$ дає $(\Box q)_\alpha([x\mapsto a])=T$, звідки $(\forall x\Box q)_\alpha([x\mapsto a])=T$ внаслідок $A_\alpha=\{a\}$. Отримали $(\forall x\Box q\to\Box\forall x\, q)_\alpha([x\mapsto a])=F$, тому $\alpha\,|\!\neq\forall x\Box q\to\Box\forall x\, q$.

Наслідок 9.4.4. Формули $\forall x\Diamond\Phi\to\Diamond\forall x\Phi$ та $\Diamond\exists x\Phi\to\exists x\Diamond\Phi$ спростовні вже для ЗМС еквітонних предикатів.

Аналогічні контрмоделі можна побудувати для ТмМС і ММС.

Формула $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$ відома як *формула Баркан*.

Формула $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ – це конверсія формули Баркан.

Як показує приклад 9.4.7, формула Баркан є спростовною. За теоремою 9.4.2 конверсія формули Баркан істинна в кожній ЗМС еквітонних предикатів. Водночас конверсія формули Баркан спростовується [16] у деяких реляційних моделях алетичної модальної логіки. Суперечності тут немає, адже у цих реляційних моделях за умови $d\notin {}^V\!A_\beta$ значення $\Phi_\beta(d)$ вважається хибним, а ми розглядаємо *часткові* предикати, коли значення $\Phi_\beta(d)$ може бути невизначеним.

Для першопорядкових ЗМС, ТмМС та ММС побудовано (див., напр., [23, 25]) числення секвенційного типу. Такі числення базуються на реляційних семантичних моделях зазначених логік. Основою побудови цих числень є властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул мов таких ТМЛ. Для побудованих секвенційних числень доведено теореми коректності й повноти.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення КНМС.

2. Як уточнюється поняття КНМС для КНМЛ номінативних рівнів?

3. Опишіть синтаксис мови КНМЛ кванторного рівня.

4. Як задаються в КНМС множини гарантовано неістотних для формул імен?

5. Що таке сигнатура синтетичної неістотності КНМС?

6. Як визначається тип КНМС?

7. Опишіть відображення інтерпретації формул на станах світу КНМС.

8. Дайте визначення:

– неспростовної в КНМС формули;

– неспростовної формули.

9. Що таке транзиційна модальна система?

10. Що таке загальна ТМС (ЗМС)?

11. Що таке темпоральна ТМС (ТмМС)?

12. Що таке мультимодальна ТМС (ММС)?

13. Опишіть мови:

– чистих першопорядкових ЗМС;

– чистих першопорядкових ТмМС.

14. Дайте визначення:

– *R*-ЗМС, *T*-ЗМС, *S*-ЗМС, *RT*-ЗМС, *RS*-ЗМС, *TS*-ЗМС, *RTS*-ЗМС;

– *R*-ТмМС, *T*-ТмМС, *S*-ТмМС, *RT*-ТмМС, *RS*-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС;

– *R*-ММС, *T*-ММС, *S*-ММС, *RT*-ММС, *RS*-ММС, *TS*-ММС, *RTS*-ММС.

15. Що таке ММС епістемічного типу?

16. Що таке ТМС із сильною умовою визначеності на станах?

17. Що таке ТМС із загальною умовою визначеності на станах?

18. Як взаємодіють модальні композиції ТМС із реномінаціями?

19. Наведіть приклади взаємодії модальних композицій із кванторами.

Вправи

1. Задайте відображення *Im* для формул вигляду ◊Φ.

2. Задайте відображення *Im* для формул вигляду ◊↑Φ та ◊↓Φ.

3. Доведіть теорему 9.4.1.

4. Доведіть теорему 9.4.2.

5. Дайте явний опис взаємодії модальних композицій ТмМС та ММС із реномінаціями.

6. Побудуйте контрмоделі для аналогів формул прикладів 9.4.6–9.4.7 у випадках ММС та ТмМС.

7. Побудуйте контрмоделі для аналогів формул прикладів 9.4.8 у випадках ММС та ТмМС еквітонних предикатів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Андон Ф. И.** Логические модели интеллектуальных информационных систем / Ф. И. Андон, А. Е. Яшунин, В. А. Резниченко. – К. : Наукова думка, 1999.
2. **Басараб И. А.** Композиционные базы данных / И. А. Басараб, Н. С. Никитченко, В. Н. Редько. – К. : Либідь, 1992.
3. **Глушков В. М.** Алгебра, языки, программирование / В. М. Глушков, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко. – К. : Наукова думка, 1974.
4. **Ішмуратов А. Т.** Вступ до філософської логіки / А. Т. Ішмуратов. – К. : Абрис, 1997.
5. **Клини С.** Введение в метаматематику / С. Клини. – М. : ИЛ, 1957.
6. **Клини С**. Математическая логика / С. Клини. – М. : Мир, 1973.
7. **Мендельсон Э.** Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. – М. : Наука, 1976.
8. **Непейвода Н. Н.** Прикладная логика / Н. Н. Непейвода. – Новосибирск : НГУ, 2000.
9. **Нікітченко М. С.** Основи математичної логіки / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2006.
10. **Нікітченко М. С.** Математична логіка та теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2008.
11. **Нікітченко М. С.** Прикладна логіка / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2013.
12. **Нікітченко М. С.** Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів / М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 73–86.

13. **Нікітченко М. С.** Логіки загальних недетермінованих предикатів: семантичні аспекти / М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2018. – № 2–3. – С. 31–45.

14. **Основи дискретної математики** / Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський та ін. – К. : Наукова думка, 2002.

15. **Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови** / В. Н. Редько, Д. Б. Буй, Ю. Й. Брона, С. А. Поляков. – К. : Академперіодика, 2001.

16. **Семантика модальных и интенсиональных логик :** сб. статей / под ред. В. А. Смирнова. – М. : Прогресс, 1981.

17. **Справочная книга по математической логике** : в 4 ч. / под ред. Дж. Барвайса. – М. : Наука, 1982–1983.

18. **Такеути Г.** Теория доказательств / Г. Такеути. – М. : Мир, 1978.

19. **Фейс Р.** Модальная логика / Р. Фейс. – М. : Наука, 1974.

20. **Чень Ч**. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем / Ч. Чень, Р. Ли. – М. : Наука, 1983.

21. **Шенфилд Дж**. Математическая логика / Дж. Шенфилд – М. : Наука, 1975.

22. **Шкільняк О. С.** Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік / О. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23.

23. **Шкільняк О. С.** Секвенційні числення темпоральних і мультимодальних логік часткових предикатів / О. С. Шкільняк // Штучний інтелект. – 2013. – № 1. – С. 55–66.

24. **Шкільняк О. С.** Транзиційні модальні логіки немонотонних квазіарних предикатів / О. С. Шкільняк // Компьютерная математика. – 2014. – Вып. 2. – С. 99–110.

25. **Шкільняк О. С.** Композиційно-номінативні модальні логіки немонотонних часткових предикатів та їх числення / О. С. Шкільняк, В. С. Касьянюк, Л. М. Малютенко // Пробл. програмування. – 2017. – № 2. – С. 24–39.

26. **Шкільняк С. С.** Математична логіка. Приклади і задачі / С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2008.

27. **Шкільняк С. С.** Першопорядкові композиційно-номінативні логіки з предикатами слабкої та строгої рівності / С. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2019. – № 3. – С. 28–44.

28. **Шкільняк С. С.** Композиційно-номінативні логіки безкванторних рівнів / С. С. Шкільняк, Д. Б. Волковицький // Пробл. програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 48–62.

29. **Ben-Ari M.** Mathematical Logic for Computer Science. – 2nd edition / M. Ben-Ari. – Springer-Verlag, 2001.

30. **Belnap N.** The logic of questions and answers / N. Belnap, T. Steel. – New Haven and London : Yale Univ. Press, 1976.

31. **Cocchiarella N. B.** Modal logic / N. B. Cocchiarella, M. A. Freund. – Oxford University Press, 2008.

32. **Clifford D.** Tense and tense logic / D. Clifford. – Hague : Mouton, 1975.

33. **Emerson E. A.** Temporal and Modal Logic / E. A. Emerson // Handbook of Theoretical Computer Science. – 1995. – Vol. B. – Ch. 16.

34. **Gabbay D.** Elementary logic (A procedural perspective) / D. Gabbay. – Prentice Hall Europe, 1998.

35. **Handbook of Logic in Computer Science** : in 5 vol. / Eds. S. Abramsky, D. Gabbay, T. S. E Maibaum. – Oxford : Clarendon Press, 1994–2000.

36. **Handbook of Modal Logics.** V. 3. Studies in Logic and Practical Reasoning / Eds. P. Blackburn, J. van Benthem, F. Wolter. – Elsevier, 2006.

37. **Huth M.** Logic in Computer Science (Second Edition) / M. Huth, M. Ryan. – Cambridge University Press, 2004.

38. **Kröger F.** Temporal logic and state systems / F. Kröger, S. Merz. – Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.

39. **Logics of Specification Languages**. EATCS Series, Monograph in Theoretical Computer Sciens / Eds. D. Bjorner, M. C. Henson. – Heidelberg : Springer, 2008.

40. **Łukasiewicz J.** O logice trójwartościowej / J. Łukasiewicz. – Ruch Philosoficzny. – Lwów, 1920. – Vol. 5.

41. **Manna Z.** The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems: Specification / Z. Manna, A. Pnueli. – New-York : Springer-Verlag, 1991.

42. **Middelburg S. A.** Logic and specification / S. A. Middelburg. – London : Chapman & Hall Computing, 1993.

43. **Nikitchenko M.** Algebras and logics of partial quasiary predicates / M. Nikitchenko and S. Shkilniak // Algebra and Discrete Mathematics. – 2017. – Vol. 23. № 2. – P. 263–278.

44. **Oxford English Dictionary :** in 12 vol. / Eds. J. Simpson and E. Weiner. – Clarendon Press, 1989.

45. **Prior A. N.** Past, Present and Future / A. N. Prior. – Oxford : Clarendron, 1967.

З М І С Т

Навчальне видання

ШКІЛЬНЯК Степан Степанович

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА
ПРИКЛАДИ Й ЗАДАЧІ

Навчальний посібник

Редактор *Н. Земляна*
Технічний редактор *Ю. Куценко*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Формат 60x84$^{1/16}$. Ум. друк. арк. 17,7. Наклад 100. Зам. № 222-10478.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № К3.
Підписано до друку 18.11.22

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет",
Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.knu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02