Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
до курсу “ТЕОРІЯ ОПТИМІЗАЦІЇ”
за спеціальністю “Інформатика”

АНАЛІЗ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДОПУСТИМИХ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ

Кудін В.І.

Київ-2014

УДК 519.852:519.876

АНАЛІЗ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДОПУСТИМИХ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ / Кудін В.І.: Електронне видання, - 2014.- 45с.

Затверджено Вченою радою
факультету кібернетики
Протокол №4 від 27 січня 2014 року

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Задум видання першої роботи з запланованого циклу методичних матеріалів для студентів з математичним профілем спеціалізації інформатика, по розробці та застосуванні базових методів, алгоритмів та процедур аналізу та оптимізації моделей, що подаються лінійними та супутніми до них слабонелінійними за параметрами системами виник досить давно. Можливість реалізувати цей задум появилась лише нещодавно. Відомо, що в класі лінійних систем (лінійних алгебраїчних рівнянь та нерівностей, систем нелінійних та диференційних рівнянь, задач лінійного програмування, тощо) формалізується значна кількість класичних математичних задач моделювання процесів різної природи, тому основна увага в роботі зосереджена саме на цих системах. На основі математичного апарату лінійних систем грунтуються моделі та методи дослідження і більш складних проблем проведення аналізу та оптимізації в теорії ігр, задачах математичної фізики та економіки, зокрема, і таких що подаються в класі як слабконелінійних систем та нелінійних [1-14]. На сьогодні, розроблено загальний підхід в дослідженні задач оптимізації на основі положень теорії Дубовицького-Мілютіна [1], який з єдиних позицій (концепції) об’єднує оптимізацію різних класів задач. В той же час відсутня єдина методологія та підхід проведення аналізу властивостей систем для використання. На часі стало виробити також базову методологію аналізу широкого класу лінійних моделей та близьких до них.

Підходи до аналізу властивостей лінійних систем формувались в ході обговорень з Валентином Мефодійовичем Войналовичем, старшим науковим співробітником тодішнього Інституту кібернетики Національної Академії Наук УРСР, що відображено в ряді наукових робіт [10-12]. Нажаль, його уже немає серед нас, але він встиг зробити вагомий внесок в розробку методів та алгоритмів дослідження задач неперервної та дискретної оптимізації в одно та багатокритеріальній постановці.

Вступ. Одним з підходів, направленим на підвищення ефективності методів, алгоритмів та процедур аналізу лінійних систем, зокрема, моделей лінійного програмування на оптимальність, особливо великорозмірних, грунтується на виявленні обмежень моделі, які не змінюють множину її допустимих розв'язків (названі пасивними) або не формують множину оптимальних розв'язків, а подальшому неактивні [5,9-13]. Такий підхід, як правило, виправданий, оскільки в лінійних моделях великої розмірності значна кількість обмежень і стовпців не впливають на формування оптимального розв'язку. Ідентифікація пасивних та неактивних обмежень на предоптимізаційній і оптимізаційній стадіях дозволяє не лише підвищити ефективність алгоритмів розв'язку таких задач, але й дає важливу інформацію про досліджувану модель. Процедури скорочення розмірності моделі дають можливість проводити релаксацію обмежень і, використовуючи один із точних методів, наприклад, сімплекс-метод, знаходити оптимальний розв'язок задачі. Застосування "механізмів" процедур релаксації несуттєвих обмежень виправдано, якщо при невеликих затратах на їх реалізацію вдається значно скоротити розмірність задачі, а поєднання таких процедур з методом оптимізації організовано ефективно.

У роботі обгрунтовується метод допустимих базисних матриць (МДБМ), що належить до сімейства симплекс-методів. Це технологія побудови процедур аналізу лінійних систем і, зокрема, моделей лінійного програмування з постійними, "збуреними" та нелінійними за параметрами елементами. За рядом ознак цей метод двоїстий до методу послідовного покращення плану прямої моделі [2-7,13,14]. Концепція методу є спеціально розробленою [9-12] для дослідження моделей в яких, число обмежень значно перевищує число змінних. Застосування МДБМ без значних обчислювальних витрат дозволяє проводити аналіз лінійної системи ідентифікувати пасивні та неактивні обмеження, знаходити точний або наближений розв'язок [9-12]. В основі методу лежить ідея базисної матриці. В базисній матриці в ході ітераційного процесу заміщаються окремі рядки нормалями обмежень моделі. Збіжність до оптимального розв'язку "іде" за допустимими базисними вершинами багатогранної множини. Значення цільової функції направлено зростатиме (при задачі на максимум). Це дозволяє безпосередньо на кроках алгоритму застосувати теорему про пасивні обмеження. Метод поєднує в собі переваги сімплекс-методів такі як врахування властивості суперрозрідженості матриці умов при представленні оберненої матриці та схеми організації обмінів елементами методу між зовнішньою та оперативною пам'яттю. МДБМ використовує структурні специфіки конкретних моделей при побудові схеми дослідження, аналізує властивості компонент моделі, включаючи і великорозмірні, на стадії дооптимізації, оптимізації та постоптимізації. Властивості встановлені для базових систем при лінійних елементах моделі можуть бути поширені для аналізу збурених лінійних моделей та з нелінійними за параметрами компонентами [11], тобто слабонелінійних. Відомо, що двоїста пара моделей лінійного програмування в практичних постановках має чітке змістовне трактування, а тому одночасне дослідження прямої та двоїстої моделей дає можливість підходити до аналізу моделі більш повно [1,4,5]. Загалом, знаходження оптимального розв′язку є лише одним із пунктів аналізу. Переважна більшість досліджень лінійних систем типу моделей лінійного програмування направлені, в основному, саме на знаходження оптимального розв′язку задачі [2-14]. Запропонований метод аналізу та оптимізації лінійної системи - МДБМ, не лише знаходить оптимальний розв′язок, але й дозволяє ідентифікувати пасивні та неактивні обмеження моделі (лінійні нерівності). Метод "дає" умови існування, єдиності, необмеженості та неєдиності оптимальних розв′язків, встановлює їх структурні властивості.

1. **Метод допустимих базисних матриць**

Відомо, що моделі лінійного програмування загального вигляду можуть бути приведені до канонічної форми [2-7], тому без обмеження загальності будемо розглядати як базову класичну канонічну задачу лінійного програмування, в якій кількість змінних (стовпців) перевищує кількість рядків

$$\min Cx, \tag{1}$$

$$Ax = B^T, \tag{2}$$

$$x \geq 0 \tag{3}$$

При аналізі моделей лінійного програмування, де кількість обмежень перевищує кількість змінних, як базову найчастіше розглядають задачу вигляду

$$\max Bu, \tag{4}$$

$$A^T u^T \leq C^T, \tag{5}$$

де

$x = (x_1, x_2, .., x_n)^T$, $u = (u_1, u_2, .., u_m)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$, $C = (c_1, c_2, .., c_n)$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm})$, $I = \{1, 2, .., m\}$, $J = \{1, 2, ..., n\}$, $A = \left\{a_{ij}\right\}_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}} = (a_j)_{j=\overline{1,n}}$ - елементи та рядки матриці A^T, Т-знак транспонування.

Задача (1)-(3) - "довга", тобто n>>m, матриця А обмежень витягнута горизонтально, ранг системи рівним m.

Задача виду (4),(5) - "висока", в якій n обмежень, m змінних, матриця A^T обмежень витягнута вертикально, а множина допустимих розв'язків обмежена. У випадку наявності двосторонніх обмежень на змінні в задачі (4), (5) нижні та верхні межі представимо у вигляді.

$$u_H \leq u \leq u_B, \tag{6}$$

де $u_H = (u_{1(H)}, u_{2(H)}, ..., u_{m(H)})$, $u_B = (u_{1(B)}, u_{2(B)}, ..., u_{m(B)})$ m- вектори. Модель (1)-(3) досліджується в просторі E^n, а (4),(5) в просторі E^m.

Визначення 1. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей обмежень (5), будемо називати базисною, а розв′язок відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0^T = C^0$ базисним. Дві базисні матриці з відмінними одним рядком будемо називати суміжними.

Нехай β_{ij}, $i, j = 1,2,...,m$ - елементи базисної підматриці $A_б$, $e_{ri,}$ - елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $e_k = (A_б^{-1})_k$.- стовпець оберненої матриці. Розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02},..., u_{0m})$ системи рівнянь $A_б u^T = c^0$, де c^0- підвектор C^T - компоненти якого складаються з правих частин обмежень (5), нормалі, яких утворюють базисну матрицю $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2},..., \alpha_{rm})$- вектор розвинення нормалі обмеження $a_r u_1 \le c_r$ за рядками базисної матриці $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02},..., \alpha_{0m})$ вектор розвинення нормалі цільової функції (4) за рядками базисної матриці $A_б$, .$\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$ - нев'язка r-го обмеження (5) в вершині u_0; $J_б, J_H$, $J = J_б \cup J_H$- множини індексів базисних і небазисних обмежень (5), $J_б = \{i_1, i_2,..., i_m\}$, $J_H = J / J_б$ − множини індексів,

$\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2},..., \alpha_{rm})$− вектори розвинення a_r за рядками $A_б$ та $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02},..., \alpha_{0m})$ − вектор розвинення B за рядками $A_б$ утворюють матрицю L $(n+1)\times m$, де $L_i = (\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ni})^T$ − i- й стовпець; $\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$, $\Delta_0 = B u_0^T$, $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n)$.

Встановимо формули зв'язку базисного розв'язку, коефіцієнтів розвинення нормалей обмежень та цільової функції (4), коефіцієнтів оберненої матриці, нев′язок обмежень та значень цільової функції при переході до базисної матриці $\overline{A_б}$, яка утворюється із матриці $\overline{A_б}$ заміною її рядка a_k на a_l, що не входить в базисну матрицю $A_б$. В новій базисній матриці $\overline{A_б}$ введені величини будемо називати елементами або компонентами методу базисних матриць і будемо позначати рискою зверху, тобто

$\overline{\beta}_{ij}$, $\overline{\alpha}_r$, $\overline{\Delta}_k$, $\overline{e}_{ri}$, $\overline{\alpha}_0$. Вершини (0-грані), ребра (1-грані), к-грані, нормалі, гіперплощини та півпростори, багатовиди будемо називати структурними елементами моделі.

При знаходженні формул та основних співвідношень поміж елементами методу при переході від одної базисної матриці до наступної вважаємо $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ - нормалі обмежень, $a_j u^T \le c_j$, $j \in J_б$, де $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ - індекси обмежень, нормалі яких утворюють рядки базисної матриці $A_{б,}$ a_l - нормаль обмеження $a_l u \le c_l$, $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$- коефіцієнти розвинення вектора a_l за рядками базисної матриці $A_{б,}$.

Наведемо критерій лінійної незалежності векторів.

Лема 1. (Критерій лінійної незалежності системи векторів) Необхідною і достатньою умовою лінійної незалежності системи векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{k-1}}, a_l, a_{i_{k+1}}, ..., a_{i_m}$ утвореної заміною вектора a_{i_k}, що займає к-ий рядок в базисній матриці $A_б$ вектором а$_l$ є виконання умови $\alpha_{lk} \ne 0$.

Теорема 1. (Про зв'язки між суміжними базисними матрицями). Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв’язками, нев′язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних матрицях мають місце співвідношення

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\quad r = \overline{0,n};\quad i = \overline{1,m};\ i \ne k; \tag{7}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\quad r = \overline{1,m};\quad i = \overline{1,m};\ i \ne k; \tag{8}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{1k}}\Delta_l,\quad j = \overline{1,m}, \tag{9}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}},\ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ r = \overline{1,n};\quad r \ne k; \tag{10}$$

$$\overline{Bu_0^T} = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \qquad (11)$$

причому умовою невиродженості є $\alpha_{lk} \neq 0$, умовою допустимості опорного базисного розв‘язку - $\alpha_{lk} < 0$, а умовою зростання цільової функції - $\alpha_{0k} < 0$.

Теорема 1. (матричний аналог) Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв’язками, нев′язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних розв′язках мають місце такі співвідношення

$$\overline{L}_i = \left\{ \begin{array}{l} L_k / \alpha_{lk}, \ i = k \\ \\ L_i - \overline{L}_k \times \alpha_{li}, \ i \neq k, \ i = \overline{1,m} \end{array} \right\} \qquad (7)$$

$$\overline{(A_b^{-1})_i} = \left\{ \begin{array}{l} (A_b^{-1})_k / \alpha_{lk}, \ i = k \\ \\ (A_b^{-1})_i - \overline{(A_b^{-1})_k} \times \alpha_{li}, \ i \neq k, \ i = \overline{1,m} \end{array} \right\} \qquad (8)$$

$$\overline{u}_0 = u_0 - (A_b^{-1})_k \times \Delta_l \qquad (9)$$

$$\overline{\Delta} = \Delta - \overline{L}_k \times \Delta_l \qquad (10)$$

в припущення виконання

$$\alpha_{lk} \neq 0. \qquad (11)$$

Доведення. Справедливість (7) випливає з наступних тотожних перетворень:

$$a_{rj} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_{ri} \overline{\beta}_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \overline{\alpha}_{ri} \beta_{ij} + \overline{\alpha}_{rk} a_{lj}$$

Оскільки, $a_{lj} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{li}\beta_{ij}$, то після підстановки цього співвідношення отримаємо:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \overline{\alpha}_{ri}\beta_{ij} + \overline{\alpha}_{rk}a_{lj} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \overline{\alpha}_{ri}\beta_{ij} + \overline{\alpha}_{rk}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{1i}\beta_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ri}\beta_{ij}.$$

Порівнявши коефіцієнти зліва і справа для кожного i, де $i=\overline{1,m}$ встановлюємо, що $\overline{\alpha}_{ri} + \overline{\alpha}_{rk}\alpha_{1i} = \alpha_{ri}$, $i \neq k$; $\overline{\alpha}_{rk}\alpha_{1k} = \alpha_{rk}$, $i = k$, тобто справедливість (7), оскільки

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li,} \quad r=\overline{0,n};\quad i=\overline{1,m};\ i\neq k\,,$$

а в матричній формі

$$\overline{L}_i = \begin{cases} L_k / \alpha_{lk},\ i=k \\ \\ L_i - \overline{L}_k \times \alpha_{li},\ i\neq k,\ i=\overline{1,m} \end{cases}$$

Аналогічно отримаємо формули (8), враховуючи, що для транспонованих та прямих квадратних матриць справедливо $\overline{A}_б^{-1}\cdot\overline{A}_б = A_б^{-1}\cdot A_б$, тобто

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{e}_{ri}\overline{\beta}_{ij} = \sum_{i=1,i\neq k}^{m}\overline{e}_{ri}\beta_{ij} + \overline{e}_{rk}\,a_{lj} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m}\overline{e}_{ri}\beta_{ij} + \overline{e}_{rk}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{li}\beta_{ij} = \sum_{i=1}^{m} e_{ri}\beta_{ij}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li,} \quad r=\overline{1,m};\quad i=\overline{1,m};\ i\neq k$$

або

$$\overline{(A_b^{-1})}_i = \begin{cases} (A_b^{-1})_k / \alpha_{lk},\ i=k \\ \\ (A_b^{-1})_i - \overline{(A_b^{-1})}_k \times \alpha_{li},\ i\neq k,\ i=\overline{1,m} \end{cases}$$

Із формули (8) та наступних перетворень витікає співвідношення (9), що зв'язує базисні розв'язки в двох суміжних базисних матрицях:

$$\overline{u}_{0j} = \sum_{i=1}^{m} \overline{e}_{ji} \overline{c}_i^0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \overline{e}_{ij} c_i^0 + \overline{e}_{jk} \overline{c}_k^o =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} (e_{ji} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}) c_i^0 + \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} c_l =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} e_{ji} c_i^0 - e_{jk} c_k^0 - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \alpha_{li} c_i^0 + \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} c_l =$$

$$= u_{oj} - e_{jk} \frac{\alpha_{lk}}{\alpha_{lk}} c_k^0 - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} (\sum_{i=1, i \neq k}^{m} \alpha_{li} c_i^0 - c_l) =$$

$$= u_{oj} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} (\sum_{i=1}^{m} \alpha_{li} c_i^0 - c_l) =$$

$$= u_{oj} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} (\sum_{j=1}^{m} a_{lj} \sum_{i=1}^{m} e_{ji} c_i^0 - c_l) =$$

$$= u_{oj} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} (\sum_{i=1}^{m} a_{li} u_{0i} - c_l) =$$

$$= u_{oj} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l .$$

тобто $\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{1k}} \Delta_l, \; j = \overline{1, m}.$

В матричній формі це набуде вигляд

$$\overline{u}_0 = u_0 - (A_b^{-1})_k \times \Delta_l$$

При доведенні (10) використаємо (9). Отримаємо враховуючи, що $\Delta_k = 0$ і $\alpha_{kk} = 1$ при $k \notin J_\sigma$, $\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{1k}}$,

$$\overline{\Delta}_r = \sum_{i=1}^{m} a_{ri} \overline{u}_{0i} - c_r =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ri}\, (u_{oi} - \frac{e_{ik}}{\alpha_{lk}} \Delta_l) - c_r =$$

$$\Delta_r - \frac{\Delta_l}{\alpha_{1k}} \sum_{i=1}^{m} a_{ri}\, e_{ik} =$$

$$= \Delta_r - \frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} \sum_{i=1}^{m} a_{ri}\, e_{ik} = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l$$

$$\overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \;\; r = \overline{1,n};\; r \neq k$$

Аналогічно, можна отримати співвідношення

$$B\overline{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \Delta_l$$

Співвідношення для

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \;\; \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \;\; r = \overline{1,n}; \quad r \neq k\,; \qquad \text{та}$$

$$B\overline{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \Delta_l,$$

в матричній формі можуть бути представлені у вигляді

$$\overline{\Delta} = \Delta - \overline{L}_k \times \Delta_l$$

що завершує доведення теореми.

На основі встановлених співвідношень (7)-(11) будуватиметься схема (типу сімплекс-методу) пошуку оптимального розв’язку послідовними переходами за допустимими базисними вершинами – метод допустимих базисних матриць. За алгоритмами цих методів на кожній ітерації базисні розв’язки u_0 задовольняють обмеженням (5). Обгрунтування методу приведено в припущенні невиродженості базисних розв’язків задачі (4),(5). Іншими словами, в кожній базисній вершині перетинаються рівно m незалежних гіперплощин. Більш детально питання виродженості базисних розв′язків задач буде досліджене після обгрунтування положень методу.

Нехай u_0 - допустимий базисний розв'язок задачі (4),(5), тобто існує базисна матриця $A_б$ така, що $A_б u_0^T = c^0$ і $\Delta_r \le 0,\ r = \overline{1,m}.$

Теорема 2. (Про базисні розв'язки) Для того, щоб $Bu_0^T > Bu_0^T$ і $\overline{u_0}$ новий базисний розв'язок зберігався допустимим для задачі (4), (5), необхідно і достатньо існування таких номерів k та l, для яких

$$\alpha_{0k} < 0, \qquad \alpha_{1k} < 0 \text{ і } \frac{\Delta_r}{\Delta_1} \ge \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}},\ r = \overline{1,n} \qquad (12)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $B\bar{u}_0^T > Bu_0^T$, де $\bar{u}_0$ та u_0 допустимі базисні розв'язки відповідно базисних матриць $\bar{A}_б$ та $A_б$. Оскільки, $\Delta_k = -\frac{\Delta_1}{\alpha_{1k}} < 0$ то $\alpha_{lk} < 0$. Враховуючи, що $B\bar{u}_0^T - Bu_0^T = -\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{1k}}\Delta_1 \ge 0,$ то $\alpha_{ok} < 0$. Із умови (10) і допустимості базисних розв'язків слідує, що $\frac{\Delta_r}{\Delta_l} \ge \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \quad r = \overline{1,m}.$

Достатність. Припустимо виконання умови (12). При такому виборі k та l, враховуючи (10), (11), витікає, що $B\bar{u}_0^T > Bu_o^T$, а розв'язок $\bar{u}_0$ допустимий. Оскільки $\alpha_{lk} \ne 0$, то враховуючи умову леми 1 $\bar{A}_б$ - базисна матриця, а $\bar{u}_0$ - допустимий базисний розв'язок.

Ця теорема дає можливість організувати сімплексні перетворення заміною рядків базисної матриці в результаті яких відбуватиметься перехід від одного допустимого базисного розв'язку до наступного, і при цьому цільова функція буде "зростать" при задачі на максимум. Для обгрунтування сімплекс-методу приведемо теореми, що визначають ознаки оптимальності, необмеженості розв'язку задачі.

Визначення 2. Допустимий базисний розв’язок u_0 оптимальний, якщо $Bu_0^T \geq Bu^T$ для всіх u, що задовольняють (5).

Наслідок 1. (Теореми 2). Для того, щоб $B\bar{u}_0 < Bu_0$ а $\bar{u}_0$ новий розв'язок зберігався допустимим базисним для задачі (4), (5) необхідно і достатньо, щоб існували такі номера k та l для яких

$$\alpha_{0k} > 0 \ , \ \alpha_{lk} < 0 \, , \quad \frac{\Delta_r}{\Delta_l} \geq \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \qquad r = \overline{1,n}$$

Теорема 3. (Критерій оптимальності розв’язків) Для оптимальності базисного розв’язку u_0 необхідно і достатньо невід’ємності коефіцієнтів розвинення вектору нормалі цільової функції (4) за векторами базисної матриці $A_б$, тобто. $\alpha_{ok} \geq 0$ для всіх $k = \overline{1,m}$

Доведення. **Необхідність.** Теорема 1 встановлює зв’язки між елементами сімплексної схеми в двох суміжних базисних матрицях, тобто співвідношення (7)-(11).

Нехай $\bar{u}_0$ - оптимальний розв’язок задачі лінійного програмування (4)-(5), а $A_б$ - оптимальна базисна матриця. Встановимо невід’ємність $\alpha_{0k} > 0, \quad k = \overline{1,m}$ коефіцієнтів розвинення нормалі цільової функції за рядками $A_б$.

Згідно (11) зв’язок значень цільових функцій в двох суміжних базисних розв’язках описується співвідношенням :

$$B\bar{u}_0 - Bu_0 = -\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l \geq 0$$

при виконанні умови росту цільової функції $\alpha_{lk} < 0, \quad \Delta_l < 0, \quad \alpha_{ok} < 0$

У випадку оптимальності $\bar{u}_0$ всі базисні переходи в суміжні вершини будуть приводить до зменшення значення цільової функції по всим m можливим переходам. В загальному, невиродженому випадку, кожна вершини має m ребер та суміжних вершин $\approx{u}_0$ при обмеженості та замкнутості множини (5), тобто

$$B\bar{u}_0 - B\tilde{\tilde{u}}_0 = -\frac{\alpha_{ok}}{\alpha_{lk}}\Delta_l \le 0,$$

де - α_{ok}, α_{lk}, Δ_l - відомі елементи відносно базисної матриці $A_б$. Приведене співвідношення справедливе при $k = \overline{1,m}$. Звідси слідує, що $\alpha_{0k} \ge 0, \quad k = \overline{1,m}$ в силу виконання умов $\Delta_l < 0, \quad \alpha_{lk} < 0.$

Достатність. Нехай існує допустима базисна матриця $A_б$, така, що розвинення нормалі цільової функції B за рядками $A_б$ $\alpha_{0i} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$. Встановимо оптимальність базисної матриці $A_б$ та відповідного йому базисного розв'язку u_0 для задачі (4), (5).

Для доведення використаємо співвідношення (7)-(11) встановлені Теоремами 1, 2 та 5**.** Зокрема, з формули (11), що встановлює зв'язок значень цільової функції в двох суміжних базисних розв'язках

$$B\bar{u}_0 - Bu_0 = -\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l > 0,$$

де $\Delta_l < 0 \quad \alpha_{lk} < 0, \quad \alpha_{lk} \ne 0$ умова опорності та допустимості при виконанні $\alpha_{0k} < 0$ дає збільшення значень (4) при базисних переходах.

Якщо виконується умова $\alpha_{0k'} < 0, \quad k = \overline{1,m}$, то за виконання умови опорності, допустимості при базисних переходах вираз $-\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l < 0,$ оскільки $\alpha_{lk} < 0, \quad \Delta_l < 0$, тобто не існує базисної суміжної вершини з більшим значенням цільової функції. Витікає, що $B\overline{u}_0 - Bu_0 < 0$. Це означає оптимальність u_0 та відповідного йому базисної матриці $A_б$.

Умови достатності безпосередньо слідують і із наступного ланцюга перетворень

$$Bu^T = \alpha_0 \cdot A_б \cdot u^T \le \alpha_0 \cdot C^0 = \alpha_0 \cdot A_б \cdot u_0^T = Bu_0^T,$$

де C^0 - підвектор вектору С, що складається із компонент правих частин обмежень (5) нормалі яких утворюють базисну матрицю $A_б$.

Наслідок 2. (Теореми 3) Для оптимальності базисного розв'язку u_0 та базису $A_б$ задачі max $(-Bu^T)$, $u \in U$ необхідно і достатньо недодатності коефіцієнтів розвинення вектору нормалі цільової функції -В за рядками базисної матриці, тобто $\alpha_{0k} \le 0,\ k = \overline{1,m}$.

Доведення необхідності та достатності є безпосереднім наслідком теореми 3.

Теорема 4. (Про необмеженість значень цільової функції) Якщо існує індекс k такий, що $\alpha_{0k} < 0$ і $\alpha_{rk} \ge 0$ для всіх небазисних r, то цільова функція задачі набуває необмежених значень на множині допустимих розв'язків.

Доведення. Із теореми 2 витікає, що у випадку виконання умов теореми 3 не існує переходу в допустимий базисний розв'язок, при якому значення цільової функції не зменшується. Позначимо через B_k матрицю, яка утворена з матриці $A_б$ виключенням рядка k. Розв'язок відповідної системи рівнянь визначає ребро, рівняння якого можна представити у вигляді $u = u_o - \lambda e_k$ де - λ довільне додатне число, $e_k = (e_{1k}, e_{2k}, ... e_{jk}, ..., e_{mk})$- стовпчик k матриці $A_б^{-1}$. Для всіх u, що належать цьому ребру маємо:

$$\overline{\Delta}_r = \sum_{j=1}^{m} a_{rj} \overline{u}_{0j}^T - c_r = \sum_{j=1}^{m} a_{rj} u_{0j}^T - c_r - \lambda \sum_{j=1}^{m} a_{rj} e_{jk} =$$

$$= \Delta_r - \lambda \alpha_{rk},$$

$$\overline{\Delta}_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \overline{u}_{0j}^T - c_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} u_{0j}^T - c_k - \lambda \sum_{j=1}^{m} a_{kj} e_{jk} =$$

$$= \Delta_k - \lambda \alpha_{kk} = -\lambda,$$

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \overline{u}_{0j}^T - \sum_{j=1}^{m} b_j u_{0j}^T = \lambda \sum_{j=1}^{m} b_j e_{jk} = -\lambda \alpha_{ok},$$

Таким чином, при довільному $\lambda > 0$ і виконанню умов теореми всі точки ребра задовольняють обмеженням (5), а цільова функція буде на них набувати необмежені зверху значення, що доводить теорему.

Розглянемо випадок, коли $\alpha_{ok} < 0$ і існує номер r такий, що $\alpha_{rk} < 0$.

Теорема 5. Якщо $\alpha_{ok} < 0$ і $\dfrac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{r,\ \alpha_{rk} < 0} \dfrac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$, то $B\overline{u}_0^T \ge Bu_o^T$ і $\overline{u}_0$ - допустимий базисний розв'язок.

Справедливість умов теореми слідує із Теореми 2.

Наведені теореми є основоположними для організації методу базисних матриць

1. Якщо існує базисна матриця $A_б$ така, що $\alpha_{0k} \ge 0,\ k = \overline{1,m}$, то дана базисна матриця і відповідний їй розв'язок u_0 оптимальний.

2. Якщо існує $\alpha_{ok} < 0$ і $\alpha_{rk} \ge 0$ для всіх небазисних r, то цільова функція задачі необмежена на множині допустимих розв'язків.

3. Якщо існує $\alpha_{ok} < 0$ та $\alpha_{rk} < 0$, то з допомогою перетворень (7)-(11) можна перейти до нової базисної матриці, що розв′язок набуватиме більше значення за цільовою функцією.

2. Пасивність та неактивність обмежень

Розглянемо застосування МБМ для аналізу (4),(5), зокрема, для виявлення пасивних обмежень.

Нехай

$$U = \left\{ \quad u / a_j u^T \le c_j, \quad j \in J \ \right\},$$

$$U_r = \{ u / a_j u^T \le c_j, \quad j \in J, \quad j \ne r \ \}$$

$$U^0 = \{ u_0 / B u_0^T = \max_{u \in U} B u^T, \ u \in U \}$$

$$U_r^0 = \{ u_0 / B u_0^T = \max_{u \in U_r} B u^T, u \in U_r \} .$$

Визначення 3. Обмеження $a_r u^T \le c_r$ пасивне, якщо $U = U_r$.

Визначення 4. Обмеження $a_r u^T \le c_r$ неактивне, якщо $U^0 = U_r^0$.

Через $A^0_{б(k)}$ позначимо матрицю, яка отримується із базисної матриці $A_б$, що відповідає базисному розв'язку u_0 задачі (4),(5), заміною к-го рядка, нормаллю цільової функції, взятої з протилежним знаком, тобто – B.

Визначення 5. Матрицю будемо A_k^0 називати оптимально базисною, якщо існує обернена до неї $(A^0_{б(k)})^{-1}$, $A^0_{б(k)} \cdot u_0^T = d_0$, де $d_0 = (c_1^0, ..., c_{k-1}, -B u_0^T, c_{k+1}^0, ..., c_m^0)^T$

Теорема 6. (Критерій пасивності) Для того, щоб обмеження $a_r u^T \le c_r$ було пасивним необхідно і достатньо існування базисної матриці, $A_б$ відносно якої розвинення $\alpha_{rk} \ge 0$ для всіх k.

Для теоретико-множинного представлення введемо наступні гіперплощини та півпростори:

$$П^{(0)}_{r(0)} = \left\{ \ u / a_r u^T = c_r^0 \ \right\}, \ П^{(+)}_{r(0)} = \left\{ \ u / a_r u^T \ge c_r^0 \ \right\}, \ П^{(-)}_{r(0)} = \left\{ \ u / a_r u^T \le c_r^0 \ \right\},$$

де $\Pi_{r(0)}^{(0)}$ - гіперплощина $a_r u_0^T = c_r^0$, $\Pi_{r(0)}^{(+)}$ - невід'ємний, а $\Pi_{r(0)}^{(-)}$ - недодатні півпростри утворені $\Pi_{r(0)}^{(0)}$. Аналогічно вище розглянемо також

$$\Pi_r^{(0)} = \{\ u / a_r u^T = c_r\ \},\ \Pi_r^{(+)} = \{\ u / a_r u^T \geq c_r\ \},\ \Pi_r^{(-)} = \{\ u / a_r u^T \leq c_r\ \}$$

утворення на основі гіперплощини $a_r u^T = c_r$. Вважаємо, що c_r^0 визначається, як значення цільової функції розв'язку допоміжної задачі лінійного програмування.

Наслідок 3. (Про нерозв'язність за несумісністю) Для несумісності множини U утвореної перетином недодатніх півпросторів $U_r = \{u / a_j u^T \leq c_j, j \in J, j \neq r\}$ та $\Pi_r^{(+)} = \{u / a_r u^T \leq c_r, r \in J\}$, тобто $U = U_r \cap \Pi_r^{(+)}$ необхідно і достатньо існування базисної матриці $A_б$ та розв'язку u_0 таких, що розвинення нормалі a_r за рядками базисної матриці $A_б$ мало $\alpha_{ri} \leq 0$, $i = \overline{1,m}$ та $\Delta_r = a_r u_0^T - b_r > 0$.

Теорема 7. (Критерій неактивності обмеження) Для того щоб $a_r u^T \leq c_r$ обмеження було неактивним для (5) необхідно і достатньо, щоб існувала оптимально базисна матриця $A_{б(k)}^0, k = \overline{1,m},$ відносно якої, $\alpha_{ri} \geq 0$ для всіх $i \in I$.

3. Про властивості структурних елементів моделі

Дослідимо деякі кількісні та якісні співвідношення поміж структурними елементами моделі лінійного програмування: нормалями цільової функції, направляючими векторами ребер, тощо.

Нехай існує базисна матриця $A_б$ ранг якої m та індекс k, що $\alpha_{rk} = 0,\ r \notin J_б$,

Наслідок 4. (Леми 1 та Теореми 4). Сімплексна ітерація по заміщення к-го рядка базисної матриці нормаллю $a_l \quad \forall_l \notin J_б$ утворює нову матрицю ранг якої m-1. Розв'язок відповідної системи алгебраїчних рівнянь визначає одномірну необмежену грань з направляючим вектором e_k, де e_k вектор стовпець к матриці $A_б^{-1}$, тобто $(A_б^{-1})_k$). За цих умов при

$\alpha_{ok} < 0$ необмежене зростання цільової функції,

$\alpha_{ok} > 0$ необмежене спадання цільової функції,

$\alpha_{0k} = 0$ цільова функція незмінна,

$\overline{\Delta}_k$ - оцінка обмеження, нормаль якого виводиться з базисної матриці необмежено спадає, решта $\Delta_r\ , r \notin J_б$ - незмінні і при цьому від'ємні.

Наслідок 5. (Теореми 2, 5). Якщо $\alpha_{0k} = 0$ і $\dfrac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{\substack{r_1 \\ \alpha_{rk} < 0}} \dfrac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$,

то витікає: $\quad B\overline{u}_0 = Bu_0 \quad \overline{u}_o \neq u_0$,

$\overline{u}_o$ - допустимий базисний розв'язок, а направляючий вектор $\overline{e}_k$ ребра, що з'єднує, u_0, $\overline{u}_0$ ортогональний нормалі цільової функції B.

Наслідок 6. (Теорем 2, 5.) Для ортогональності направляючого вектору ребра, що з'єднує u_0 з $\bar{u}_0$ та вектору нормалі B необхідно і достатньо $\alpha_{0k} = 0$.

Наслідок 7. (Теорем 2, 5.) Для коленіарності направляючого вектору ребра, що поєднує u_0 та $\bar{u}_0$ та нормалі B необхідно і достатньо $\alpha_{0k} = 1$.

Доведення аналогічне попередньому.

Нехай $\alpha_0 = (\alpha_0^{(-)}, \alpha_0^{(0)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(+)})$,

де

$$\alpha_0^{(-)} = \{\ i / i = \overline{1,m}\ \alpha_{0i} < 0\ \},\ \alpha_0^{(+)} = \{\ i / i = \overline{1,m}\ \ \alpha_{0i} > 0\ \}$$

$$\alpha_0^{(0)} = \{\ i / i = \overline{1,m}\ \ \alpha_{0i} = 0\ \},\ \alpha_0^{(1)} = \{\ \ i / i = \overline{1,m}\ \alpha_{0i} = 1\ \ \}$$

Наслідок 8. При виконанні

$\alpha_0^{(-)} \neq \varnothing$, переходи в сімплексній схемі пов’язані з відповідними i ведуть до росту цільової функції;

$\alpha_0^{(0)} \neq \varnothing$ з відповідними i переходи в сімплексній схемі задовольняють умові ортогональності ребра та вектору B;

$\alpha_0^{(1)} \neq \varnothing$ відповідні з i переходи в сімплексній схемі задовольняють умові колінеарності ребра e_i та нормалі B;

$\alpha_0^{(+)} \neq \varnothing$, то відповідні i переходи в сімплексній схемі пов’язані з $\alpha_{0i} > 0$ ведуть до спаду значень цільової функції;

за умови виконання умов теорем 1, 2, 5.

Наслідок 9. (Теореми 4, 5.) Якщо існує індекс k - такий, що $\alpha_{0k} = 0$ і при цьому $\alpha_{rk} \geq 0$ для всіх небазисних r , тоді область U, що визначає (4), (5) має необмежене ребро з направляючим вектором e_k. Значення цільової функції $B\overline{u}_0 = Bu_0$, $\overline{u}_0 \neq u_0$, а e_k та B є ортогональними.

Наслідок 10. (Теореми 4 5.) Якщо існує індекс к такий, що $\alpha_{0k} = 1$ та $\alpha_{rk} \geq 0$ для всіх небазисних r, тоді область U, що визначає (4), (5) має необмежене ребро з направляючим вектором e_k, причому значення цільової функції спадатиме $B\overline{u}_0 = Bu_0 - \lambda$, а e_k та B колінеарні.

Наслідок 11. (Теореми 4.) Якщо існує індекс к такий, що $\alpha_{0k} > 0$ та $\alpha_{rk} \geq 0$ для всіх небазисних r, то цільова функція задачі необмежена знизу на множині допустимих розв'язків.

Наслідок 12. (теореми 2, 5.) Якщо $\alpha_{0k} > 0$ і $\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{r, \alpha_{rk} < 0} \frac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$, то

$B\overline{u}_0 < Bu_0$, а $\overline{u}_0$ - допустимий базисний розв'язок.

4. Виродженість базисного розв'язку

При побудові "допустимої" схеми методу базисних матриць припускалась невиродженість задачі (4),(5). При переході від одного базисного розв'язку до другого значення цільової функції зростало. На кожній ітерації однозначно визначились кандидати рядки на ввод-вивод. Припущення про невиродженість задачі використовувалось при обчисленні

$\min\limits_{r \notin J_б} \frac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$, що не повинен бути рівним нулю.

α_{rk}

В супротивному випадку, якщо $\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{r, \alpha_{rk} < 0, r \notin J_b} \frac{\Delta_r}{\alpha_{rk}} = 0,$ то $\Delta_l = 0$. Це означає, що

$$\bar{u}_{0j} = u_{oj} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l = u_{0j}, \quad B\bar{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{ok}}{\alpha_{lk}} \Delta_l = Bu_0^T .$$

В результаті ітерації методу вершина (базисний розв'язок) та значення цільової функції не змінилось [7]. В таких випадках в базисній вершині перетинається більше m обмежень-гіперплощин. Геометрична суть виродженості указує шлях усунення такого стану-мале коректне зміщення. Доведемо, що побудова за певним правилом малого зміщення вектору правих частин (паралельний перенос обмежень відносно самих себе) формує задачу з не виродженими базисними розв'язками.

Розглянемо наступну ε - задачу:

$$\max_{u \in U} \sum_{i=1}^{m} b_i u_i , \tag{15}$$

де U визначається системою нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} u_i^T \le c_j + \varepsilon^{V_{j(0)}} \cdot \varepsilon^{n+1-j} = c_j(\varepsilon) \qquad (16)$$

$v_{(0)} = (v_{1(0)}, v_{2(0)}, ..., v_{j(0)}, ..., v_{n(0)})$ - n – вимірний вектор, компоненти якого визначаються співвідношеннями:

$$V_{j(0)} = \begin{cases} 0, & j \in J_б \\ j_0, \quad де \quad j_0 < j - m - 1, & j \notin J_б \end{cases}$$

$$\varepsilon \ge 0, \qquad j \in J \qquad (17)$$

Задачу (4),(5) будемо називати породжуючою, а (15)-(17) - “збуреною”.

Для обчислення нев’язок обмежень будемо використовувати співвідношення

$$\Delta_j = a_j u_o^T - c_j = a_j A_б^{-1} c^0 - c_j = \\ = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} c_i^0 - c_j, \qquad (18)$$

де $A_б u_0^T = c^0$, $u_0 = A_б^{-1} c^0$, $\alpha_j = a_j A_б^{-1}$, $c^0 = (c_1^0, c_1^0, ... c_m^0)$.

Для ε - задачі:

$$\Delta_j(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} c_i^0(\varepsilon) - c_j(\varepsilon) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} (c_i^0 + \varepsilon^{V_{i(0)}} \varepsilon^{n+1-i}) - c_j - \varepsilon^{V_{j(0)}} \varepsilon^{n+1-i} =$$

$$= \Delta_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \varepsilon^{V_{i(0)}} \varepsilon^{n+1-i} - \varepsilon^{V_{j(0)}} \varepsilon^{n+1-j}$$

Теорема 8. (Про існування невиродженого розв’язку) Якщо u_0 базисний розв’язок задачі (4),(5), то існує $\varepsilon_1 > 0$, що для $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ відповідний базисний розв′язок задачі (15),(17) буде не виродженим.

Теорема 9. (Про умови невиродженості збуреної задачі**)** Існує $\varepsilon_2 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ε - задача буде невиродженою.

Теорема 10. Довільний опорний базисний розв'язок ε - задачі буде опорним базисним розв'язком породжуючої задачі (4),(5), причому оптимальному базисному розв'язку останньої задачі відповідає оптимальний базисний розв'язок "збуреної" при ε=0.

В силу умов вище приведених теорем при виборі ε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ - задача буде не виродженою. Нормаль обмеження $1 \notin J_б$, яке вводиться в базисну матрицю, ідентифікується співвідношенням

$$\frac{\Delta_1(\varepsilon)}{\alpha_{1k}} = \min_{j \notin J_б, \Delta_j(\varepsilon) < 0, \alpha_{jk} < 0} \left(\frac{\Delta_j(\varepsilon)}{\alpha_{jk}}\right) =$$

$$= \min_{j \notin J_б, \Delta_j(\varepsilon) < 0, \alpha_{jk} < 0} \left(\frac{\Delta_j}{\alpha_{jk}} - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ji}\varepsilon^{m+1-i} - \varepsilon^{m+1-j}) / \alpha_{jk}\right) \neq 0 \qquad (19)$$

Відшукання мінімуму співвідношення (19) зводиться до послідовного порівняння коефіцієнтів при різних степенях ε, при $\Delta_j = 0$. При обгрунтованому виборі позитивних збурень ε метод приводить до руху за базисними вершинами початкової задачі (4),(5), який завершиться знаходженням розв'язку.

5. Алгоритмічна схема аналізу моделі

Приведемо один із варіантів алгоритму методу допустимих базисних матриць.

Алгоритм

Попередній крок. Вводяться в ЕОМ нормалі обмежень і цільової функції. Формується початкові допустимий базисний розв′язок u_0, матриця та інші елементи методу.

Крок 1. (Перевірка оптимальності) . Якщо $\alpha_{0k} \geq 0$ для всіх $k = \overline{1, m}$, то u_o - оптимальний розв'язок. Перехід на останній крок.

Крок 2. (Перевірка пасивності обмежень). Якщо $\alpha_{ri} > 0$ для $i = \overline{1, m}$, то обмеження $a_r u^T \leq c_r$ пасивне і в подальших розрахунках для задачі (4), (5) може не враховуватись.

Крок 3. (Вибір нормалі обмеження, що вводиться в базисну матрицю). Для деякого індексу k такого, що $\alpha_{ok} < 0$, визначаємо індекс l для якого $\dfrac{\Delta_1}{\alpha_{1k}} = \min\limits_{\substack{r \notin J_б,\\ \alpha_{rk} < 0}} \dfrac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$. Цей індекс визначає номер обмеження, нормаль якого вводиться в базисну матрицю. Якщо такий номер існує, то переходимо на крок 5 .

Крок 4. (Перевірка необмеженості значень цільової функції). Якщо для даного k такого, що $\alpha_{ok} < 0$, $\alpha_{rk} \geq 0$ для всіх небазисних r, то цільова функція необмежена. Перехід на останній крок.

Крок 5. (Перевірка неактивності обмежень) Замість нормалі обмеження, що займає к - ий рядок в базисній матриці $A_б$, вводимо коефіцієнти нормалі цільової функції B, взяті з протилежним знаком. Формуємо оптимально базисні матриці B_k^0 $k = \overline{1, m}$. Проводимо перетворення елементів методу за формулами (7)-(11). Якщо для нормалі деякого r – го обмеження $\alpha_{ri} \geq 0$ при $i = \overline{i, m}$, то обмеження $a_r u^T < c_r$ неактивне і в подальших розрахунках задачі (4),(5) може не враховуватись.

Крок 6. (Формування нового базисного розв'язку) Замість нормалі цільової функції, що займає на k -ий рядок базисної матриці $A_б$, вводимо нормаль 1-го обмеження (5). Формуємо новий базисний розв'язок і проводимо перетворення елементів методу за (7)-(11). Переходимо на крок 1.

Останній крок. (Завершення роботи алгоритму). Аналіз роботи алгоритму. Формування інформації про виявлені пасивні та неактивні обмеження, оптимальний розв’язок .

Запропонована схема методу може бути застосована для побудови процедур аналізу моделі на стадії дооптимізації:

- уточнення меж просторових змінних та оптимального розв'язку (4),(5),

- ідентифікації пасивних обмежень,

- локалізації області оптімума,

- знаходження наближеного розв'язку,

- побудови агрегуючих множин (аналог процедури $V_{ЛП}$ [7], для (5),

-“виділення” фундаментальної системи обмежень, тобто гіперплощин півпростори яких формують (5),

- замінювати дослідження початкової моделі на оптимальність, послідовністю підзадач меншої розмірності на основі релаксування.

6. Структурні властивості лінійної системи

Обмеженість багатогранної множини.

Відомо, що при обмеженості багатогранної множини (5) процедурою $V_{ЛП}$ [9] визначаються (або уточняються) двохсторонні обмеження на просторові змінні $u_{j(H)}^{(k)} \le u_j \le u_{j(B)}^{(k)}, j \in j$, як послідовність вкладених параллелепіпедів $П^{(0)} \subseteq П^{(1)} \subseteq П^{(2)} \subseteq ... \subseteq П^{(k)}$, і на деякому кроці $П^{(k)} = П^{(k+1)}$. В цілому, починаючи з деякого кроку к $\varepsilon_k < \varepsilon$, де

$$\varepsilon_k = \left\| П^{(k)} - П^{(k+1)} \right\| = \max(u_{j(H)}^{(k+1)} - u_{j(H)}^{(k)}, \quad u_{j(B)}^{(k+1)} - u_{j(B)}^{(k)})$$

для любого наперед заданого ε. Точні межі параллелепіпеду змінних можна визначити і як розв'язок 2*m задач виду:

$$u_{i(H)} = \min\{u_i / \sum_{k=1}^{m} a_{rk} \cdot u_k \le c_r, \quad r \in J\}, i = \overline{1, m}. \qquad (20)$$

$$u_{i(B)} = \max\{u_i / \sum_{k=1}^{m} a_{rk} u_k \le c_r, \quad r \in J\} \qquad (21)$$

Згідно концепції побудови, процедура $V_{лп}$ послідовного аналізу варіантів, не приводить до усікання множини допустимих рішень (4)-(5). Неважко переконатись, що для оцінок $u_{i(H)}$, $u_{i(B)}$, $i = 1, \overline{m}$ задачі (20), (21) та знайдених згідно процедури $V_{ЛП}$ $u_{i(H)}^{(k+1)}, u_{j(B)}^{(k+1)}$ справведливі співвідношення $u_{i(H)} = \max_{k \to \infty} u_{i(H)}^{(k)}, \quad u_{i(B)} = \max_{k \to \infty} u_{i(B)}^{(k)}$.

Знаходження початкового розв'язку та базисної оберненої матриці займає "левову" частину розрахунків в дослідженні на оптимальність.

Побудова агрегуючої множини допустимих розв'язків (4),(5) може бути організована на основі МДБМ, як серія задач (20),(21), причому оптимальний базисний розв'язок та матриця попередньої задачі є початковими базисними розв’язком та оберненою матрицею наступної.

Півпростори породжені гіперплощинами, нормалі яких формували оптимальні базисні матриці та розв'язки задач можуть бути використані для побудови оцінюючих “зовні” та “зсередини” агрегуючих множин для (4), (5).

Необмеженість цільової функції.

"Розкриття" множини допустимих розв'язків (5) характеризується необмеженістю інтервалів за деякими змінними, тобто розв'язків в серії задач (20),(21). При цьому цільова функція (4) теж може набувать необмежені значення. Умови необмеженості цільової функції в МДБМ дає Теорема 4.

Нерозв’язність за несумісністю.

Виникнення нерозв'язності за несумістністю моделі досить часте явище в моделюванні [14]. В роботі [10] обгрунтовані умови нерозв'язності за несумісністю системи обмежень (5).

Визначення 5. Обмеження $a_r u^T \le c_r$ є породжуючим нерозв'язність за несумісністю задачі (4), (5), якщо $U = \varnothing, U_k \ne 0,$ де

$$U=\left\{ u / a_j u^T \le c_j, \quad j \in J \right\}, \; U_r = \{ u / a_j u^T \le c_j, \quad j \in J, \quad J \ne r \}$$

Теорема 11. Обмеження $a_r u^T \le c_r$ є породжуючим нерозвязність задачі (5),(5) за несумісністю, тоді і тільки тоді, якщо виконуються умови $\alpha_{ri} \ge 0, i = \overline{1,m}, \Delta_r > 0$.

Доведення теореми 11 аналогічне доведенню теореми про пасивність обмеження.

Властивості оптимальних розв′язків

Для багатьох практичних задач встановити існування розв’язку є лише однією із якісних задач аналізу. Знайти ж оптимальний розв‘язок задачі лінійного програмування є лише однією із задач кількісного аналізу. Виникає ряд супутніх задач, наприклад, знайти характер розв‘язків: їх єдиність чи неєдиність, виявити структуру множини розв‘язків (обмеженість чи необмеженість), аналітично представити або оцінити множинами більш простої структури. Ці проблеми в силу їх складності недостатньо дослідженими, а тому заслуговують на окреме дослідження. Нижче сформульовані умови, що дають змогу організувати аналіз моделей лінійного програмування.

Наслідок 13. Необхідною і достатньою умовою єдиності оптимального опорного, допустимого розв′язку u_0 є виконання умови $\alpha_{0i} > 0,\ i = \overline{1,m}$.

Наслідок 14. Допустимий, опорний, базисний розв′язок u_0 задачі неєдиний тоді і тільки тоді, коли існує k такий, що $\alpha_{0k} = 0$.

Наслідок 15. Оптимальні розв′язки задачі (4),(5) утворюють необмежену замкнену множину тоді і тільки тоді, коли серед i={1,2, ... , m}, існують такі k, що виконуються умови $\alpha_{0k} = 0,\ \alpha_{jk} > 0,\ j \notin J_б$

Наслідок 16. Розмірність множини оптимальних розв′язків визначається $\{k_0\}$, де $\{k_0\}$ потужність множини $k_0 = \{k / \alpha_{0k} = 0, k = \overline{1,m}\}$.

Справедливість наслідків 1-4 безпосередньо слідує з теореми 1 та теореми 2.

Розширений аналіз лінійної системи на основі методу базисних матриць

1. Якщо існує базисна матриця $A_б$ така, що $\alpha_{0k} \ge 0,\ k = \overline{1,m}$, то дана базисна матриця і відповідний їй розв'язок u_0 оптимальні, причому при $\alpha_{ok} > 0, \quad k = \overline{1,m}$ розв'язок єдиний, при $\exists k_0, \alpha_{0k_0} = 0$ розв'язок неєдиний.

2. Якщо існує k, $\alpha_{0k} < 0$, а $\alpha_{rk} \ge 0$ для всіх небазисних r, то цільова функція задачі необмежена на множині допустимих розв'язків.

3. Якщо існує базисна матриця $A_б$ та розв'язок u_0 такий, що $\alpha_{rk} \le 0,\ k = \overline{1,m},\ \Delta_r(u_0) > 0$, то система нерозв'язна за несумісністю обмежень.

4. Якщо існує k, $\alpha_{0k} < 0,\ \alpha_{rk} < 0$, то з допомогою перетворень (7)-(11) можна перейти до нової базисної матриці з більшим значенням цільової функції.

5. Якщо існує базисна матриця $A_б$ та розв'язок u_0 такі, що $\alpha_{rk} \ge 0,\ k = \overline{1,m},$, то обмеження $a_r.u^T \le c_r$ пасивне

6. Якщо існує оптимально-базисна матриця $A^{(0)}_{B(k)}, k = \overline{1,m}$ відносно якої $\alpha_{rk} \ge 0,\ k = \overline{1,m}$, то обмеження $a_r.u^T \le c_r$ неактивне.

8. Модельні приклади аналізу та оптимізації

Приклад 1. Оптимізаційний аналіз лінійної системи.

(0) max $17u_1 + 47u_2$,

(1) $17u_1 + 19.5u_2 \le 331.5$,

(2) $16 u_1 + 23 u_2 \le 368$,

(3) $15u_1 + 47 u_2 \le 705$,

(4) $- u_1 \le 0$,

(5) $- u_2 \le 0$,

Сформуємо початкову сімплексну таблицю виду

П/н.	Нормалі обмежень	u_1	u_2	Праві частини обмежень
1.	2.	3.	4.	5.
0.	b	17	47	
1.	a_1	17	19.5	331.5
2.	a_2	16	23	368
3.	a_3	15	47	705
4.	a_4	-1	0	0
5.	a_5	0	-1	0

Проведемо послідовні сімплексні перетворення на основі співвідношень (7)-(11). Вважаємо, що початкова базисна матриця тривіальна, утворена нормалями обмежень (5). Занесемо початкові елементи методу відносно базисного розв'язку u_0=(0,0) в основну сімплексну таблицю

Ітерація 1.

П/н	Нормалі обмежень - рядки базисної матриці	Розвинення за рядками $A_б$	Компоненти вектору розвинення		Відносні Оцінки обмежень Δ_r	Визначення Δ_r/α_{rk}	Нормалі обмеження (рядки) к - виводу та l- вводу
1	2	3	4	5	6	7	8
0.		α_0	-17	-47			
1.		α_1	-17	-19.5	-331.5	17	
2.		α_2	-16	-23	-368	16	
3.		α_3	-15	-47	-705	15	l=3
4.	1	α_4	1	0	0		
5	2	α_5	0	1	0		k=2
		u_0	u_{01}	u_{02}	Bu_0		
			0	0	0		
$A_Б^{-1}$			-1	0			
			0	-1			
			e_1	e_2			

В результаті ітерації 1 встановлено нормаль обмеження, що виводиться із базисної матриці k=2 (α_{0k} =α_{02}= -47<0) та нормаль обмеження l=3, що вводиться в базисну матрицю (min Δ_r/α_{rk} =Δ_3/α_{32} =15 , де α_{rk} <0). Ведучий елемент α_{lk} =α_{32}= -47. Проведемо перетворення сімплексної таблиці - перейдемо до наступної базисної матриці та розв'язку.

Ітерація 2.

П/н	Нормалі (рядки) базисної матриці	Розвинення нормалей обмежень за $A_б$	Компоненти вектору Розвинення		Відносні оцінки обмежень Δ_r	Визначення Δ_r/α_{rk}	Нормалі обмежень (рядки) к – виводу та l- вводу
1	2	3	4	5	6	7	8
0.		α_0	-2	1			
1.		α_1	-10.8	0.4	-39	3.6	
2.		α_2	-8.7	0.5	-23	2.64	l=2
3.	2	α_3	0	1	0		
4.	1	α_4	1	0	0		k=1
5.		α_5	-0.3	0.02	-15	50	
		u_0	u_{01}	u_{02}	Bu_0		
			0	15	705		
$A_Б^{-1}$			-1	0			
			0.3	0.3			
			e_1	e_2			

Компоненти вектору α_0 недодатні (α_{01}=-2<0), то розв′язок u_0=(0, 15) не оптимальний. Проведемо Ітерацію 3. заміщення нормалі обмеження, що займає рядок к=1 нормаллю обмеження (2).

Ітерація 3.

П/н	Рядки нормалі базисної матриці $A_б$	Розвинення за рядками $A_б$	Компоненти вектору розвинення		Відносні оцінки обмежень Δ_r	Визначення Δ_r/α_{rk}	Нормалі обмеження (рядки) к –виводу та l – вводу
1	2	3	4	5	6	7	8
0.		α_0	0.23	0.99			
1.		α_1	1.24	-0.248			
2.	1	α_2	1	0	0		
3.	2	α_3	0	1	0		
4.		α_4	0.1	0.06			
5.		α_5	0.03	0.002	0		
		u_0	u_{01}	u_{02}	Bu_0		
			2.64	14.21	789.6		
$A_Б^{-1}$			0.1	-0.06			
			-0.03	0.318			
			e_1	e_2			

В таблиці наведені основні результати обчислень.

Знаходимо оптимальний опорний базисний розв′язок u_0=(2.64,14.21) та відповідні нормалі базисних обмежень - (2),(3), які утворюють базисну матрицю, елементи оберненої матриці $A_б^{-1}$=(0.1,-0.06; -0.03,0.318), де e_1=(0.1,-0.03), e_2=(-0.06,0.318). Значення цільової функції 789.6.

Приклад 2. Аналіз оптимальних розв′язків.

$$
\begin{array}{llrcrcl}
(0) & \max & 17u_1 & + & 47u_2, & & \\
(1) & & 20u_1 & + & 16.5u_2 & \le & 330, \\
(2) & & u_1 & + & u_2 & \le & 18, \\
(3) & & 17u_1 & + & 47u_2 & \le & 699, \\
(4) & & 17.5u_1 & + & 18u_2 & \le & 330, \\
(5) & & -u_1 & & & \le & 0, \\
(6) & & & & -u_2 & \le & 0,
\end{array}
$$

Сформуємо початкову сімплексну таблицю виду

П/н.	Нормалі обмежень	u_1	u_2	Праві частини обмежень
1.	2.	3.	4.	5.
0.	b	17	47	
1.	a_1	20	16.5	330
2.	a_2	1	1	18
3.	a_3	17	47	699
4.	a_4	17.5	18	330
5.	a_5	-1		0
6.	a_6		-1	0

Проведемо послідовні сімплексні перетворення на основі співвідношень (7)-(11). Вважаємо, що початкова базисна матриця тривіальна, утворена обмеженнями (5),(6). Занесемо початкові елементи методу відносно базисного розв’язку u_0=(0,0) в основну сімплексну таблицю

Ітерація 1.

П/н	Рядки нормалі базисної матриці $А_б$	Розвинення за рядками $А_б$	Компоненти вектору розвинення		Відносні оцінки обмежень Δ_r	Визначення Δ_r/α_{rk}	Нормалі обмеження (рядки) к –виводу та l - вводу
1	2	3	4	5	6	7	8
0.		α_0	-17	-47			
1.		α_1	-20	-16.5	-330	20	
2.		α_2	-1	-1	-18	18	
3.		α_3	-17	-47	-699	14.9	l=3
4.		α_4	-17.5	-18	-330	18.3	
5.	1	α_5	1	0	0		
6	2	α_6	0	1	0		k=2
		u_0	u_{01}	u_{02}	Bu_0		
			0	0	0		
$А_Б^{-1}$			-1	0			
			0	-1			
			e_1	e_2			

В результаті ітерації 1. встановлено номер нормалі обмеження, що виводиться із базисної матриці k=2 ($\alpha_{0k} = \alpha_{02} = -47 < 0$) та нормаль обмеження l=3, що вводиться в базисну матрицю (min Δ_r/α_{rk} $=\Delta_3/\alpha_{32}=14.9$, де $\alpha_{rk}<0$), ведучий елемент $\alpha_{lk}=\alpha_{32}=-47$. Проведемо перетворення сімплексної таблиці - перейдемо до наступної базисної матриці та розв'язку.

Ітерація 2.

П/н	Рядки нормалі базисної матриці $А_б$	Розвинення за рядками $А_б$	Компоненти вектору розвинення		Відносні оцінки обмежень Δ_r	Визначення Δ_r/α_{rk}	Нормалі обмеження (рядки) к - виводу та l - вводу
1	2	3	4	5	6	7	8
0.		α_0	0	1			
1.		α_1	-1319/94	33/94	-7953/94	6.03	
2.		α_2	-30/47	1/47	-147/94	4.9	l=2
3.	2	α_3	0	1	0	0	
4.		α_4	-1033/94	18/47	-2928/47	5.7	
5.	1	α_5	1	0	0		k=1
6		α_6	-17/47	-1/47	-698/47	41.1	
		u_0	u_{01}	u_{02}	Bu_0		
			0	699/47	699		
$А_Б^{-1}$			-1	0			
			17/47	1/47			
			e_1	e_2			

Оскільки, α_0 невід″ємний (α_{01}= 0 , α_{02}=1), то розв′язок u_0=(0, 699/47) оптимальний, значення цільової функції досягає 699. Наявність серед коефіцієнтів розвинення цільової функції нульових (α_{01}= 0) означає, що розв′язок задачі неєдиний. Проведемо аналіз множини оптимальних розв′язків, для чого проведемо допоміжну Ітерацію 3. по заміщенню нормалі обмеження, що займає позицію k=1 в базисі .

Ітерація 3.

П/н	Рядки нормалі базисної Матриці $A_б$	винення за рядками $A_б$	Компоненти вектору розвинення		Відносні оцінки обмежень Δ_r	Визначення Δ_r/α_{rk}	Нормалі обмеження (рядки) к –виводу та 1 - вводу
1	2	3	4	5	6	7	8
0.		α_0	0	1			
1.		α_1	21.9	-0.11			
2.	1	α_2	1	0			
3.	2	α_3	0	1	0		
4.		α_4	14.8	1/60	-55.45		
5.		α_5			0		
6		α_6					
		u_0	u_{01}	u_{02}	Bu_0		
			4.9	13.1	699		
$A_Б^{-1}$			47/30	-1/30			
			-17/30	1/30			
			e_1	e_2			

В таблиці наведені основні результати обчислень.

Встановлено нормаль обмеження, що виводиться із базисної матриці k=1 (α_{0k} =α_{01}= 0) та нормаль обмеження l=2, що вводиться в базисну матрицю (min Δ_r/α_{rk} =Δ_2/α_{21} =4.9 , де α_{rk} <0), ведучий елемент α_{lk} =α_{21}= -30/47. Знаходимо новий базисний розв′язок $u_{0(2)}$=(4.9,13.1) та елементи оберненої матриці $A_б^{-1}$. Лінійна комбінація $u = \lambda u_0 + (1-\lambda)u_{0((2)}, 0 \le \lambda \le 1$ дає множину оптимальних розв′язків задачі. Неважко переконатись, при базисному розв′язку $u_{0(2)}$=(4.9,13.1) та базисній матриці обмеження (4) є пасивним, оскільки α_4=(14.8,1/60) має невід′ємні компоненти та відносну оцінку Δ_4 =-55.45.

Приклад 3. Аналіз лінійної системи на пасивність та неактивність компонент.

(0) max $5u_1 + 3u_2$,

(1) $55u_1 + 14u_2 \le 770$,

(2) $28u_1 + 14.5u_2 \le 406$,

(3) $24u_1 + 15u_2 \le 360$,

(4) $22u_1 + 15.5u_2 \le 341$,

(5) $20u_1 + 16.5u_2 \le 330$,

(6) $u_1 + u_2 \le 18$,

(7) $17u_1 + 47u_2 \le 699$,

(8) $17.5u_1 + 19u_2 \le 330$,

(9) $17u_1 + 19.5u_2 \le 331.5$,

(10) $16u_1 + 23u_2 \le 368$,

(11) $15u_1 + 47u_2 \le 705$,

(12) $-u_1 \le 0$,

(13) $-u_2 \le 0$,

Результати роботи алгоритмічної схеми приведені в таблиці.

Номер ітерації	Нормалі обмежень (рядки) базисної матриці	Базисний розв'язок $u_0=(u_{01},u_{02})$	Значення цільової функції	Номер рядка (нормаль) базисної матриці, яка виводиться (k)	Номер обмеження нормаль якого вводиться в базисну матрицю (l)	Номери пасивних обмежень	Номери неактивних обмежень
1	2	3	4	5	6	7	8
1.	11;12	0;15	45	12	10		
2.	11;10	2.7;14.2,	55.7	11	9	7	
3.	9;10	5.7;12.05	64.5	10	8		
4.	9; 8	7;10.9	67.7	9	6		
5.	6; 8	8;10	70	8	0		
6.	6; 0	8;10	70	0	5		8-11,13
7.	6; 5	9.4;8.6	72.8	6	4		
8.	4; 5	9.7;8.3	73.2	5	3		
9.	4; 3	11.1;6.3	74.2	4	0		
10.	0; 3	11.1;6.3	74.2	0	2		4-6,8-11,13
11.	2; 3	12.1;4.7	74.4				

Як видно з таблиці розрахунків початкова допустима базисна матриця утворена нормалями обмежень (11),(10). На другій ітерації ідентифіковано пасивне обмеження - (7). Введення цільової функції в базисну матрицю, з метою ідентифікації неактивних обмежень, проводилось на 6-ій та 10-ій ітераціях. Обмеження (8),(9),(10),(11) та (13) виявились неактивними як на ітерації 6, так і на ітерації 10. На ітерації 10 в число неактивних включені обмеження (4),(5),(6). Загальна кількість ітерацій рівна 11.

Висновки. В методичних матеріалах, поза увагою залишилось дослідження оцінок збіжності методу, не розглянуто правила побудови початкових базисних матриць та розв'язків. Ці питання стратегічно ідентичні дослідженням проведеним в [2-7], при розробці відповідних класичних схем сімплекс-методів знаходження оптимального розв'язку задачі лінійного програмування.

Загалом, оцінювати ефективність оптимізаційних методів, і сімплекс-методів складна задача, оскільки вона сильно залежить від геометричних властивостей області обмежень [2]. Встановлено, що оцінки збіжності експоненціальні (не є за своїми властивостями поліноміальними). Теоретичні оцінки по збіжності в них гірші, ніж для поліноміальних алгоритмів. З іншого боку при обгрунтуванні останніх припускається обмеженість та замкнутість множини обмежень, що не завжди є коректним. В той же час це не впливає на широту практичних застосувань сімплекс-методу, і саме ці методи найбільш досконало практично реалізовані, і мають цілком прийнятні реальні оцінки збіжності, які рідко перевищують 2*м ітерацій [3]. Поміж класичними сімплекс- методами і приведеним в даній роботі МДБМ неважко встановити деякі "паралелі" і переконатись, що проблеми, і збіжності, і початкового базисного розв'язку та оберненої матриці для них ідентичні.

Унікальною властивістю методу є можливість перевіркою простих умов відсіву ідентифіковувати пасивні та неактивні обмеження моделі безпосередньо на ітераціях методу [10]. Слід зазначити, що пасивність обмежень в різних практичних постановках задач може мати свій зміст, наприклад, як зайвий або резервний ресурс.

Важливою складовою роботи є наявність аналізу структурних властивостей елементів моделі стадії дооптимізації та оптимізації.

Запропонований метод і для побудови постоптимізаційних процедур, включаючи і стандартні класичні [2-7], наявні процедури аналізу існування, єдиності та неєдиності розв'язків задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. И.В. Гирсанов Лекции по математической теории экстремальных задач, Издательство Московского университета, 1970.
2. А. Схрейвер. Теория линейного и целочисленного программирования. М. Мир, 1991.
3. Гасс С. Линейное программирование. Физматгиз,-1961
4. Современное состояние теории исследования операций, под ред. Н.Н. Моисеева. - М. -Наука, -1979. -464с
5. Лєсдон Л.С. Оптимизация больших систем.- М. -Наука, -1975, -430с;
6. Муртаф Б. Современное линейное программирование.- М. - Мир, 1984.-224 с.
7. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Линейное программирование. Теория и конечные методы.- М.-Наука,-1963,-776с.
8. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций.- Киев: Вища школа,1979.-312 с.
9. Михалевич В.С., Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Метод последовательного анализа в задачах линейного программирования большого размера// Кибернетика. -1981.-N4. С.114-120.
10. Волкович В.Л., Войналович В.М., Кудин В.И. Релаксационная схема строчного симплекс метода // Автоматика .- 1987. -N4.-С. 79-86.
11. Волкович В.Л., Войналович В.М., Кудин В.И. Релаксационная схема двойственного строчного симплекс метода // Автоматика.-1988. -N 1, С.39-46.
12. Волошин А.Ф. Войналович В.М., Кудин В.И. Предоптимизационые и оптимизационные схемы сокращения размерности задачи линейного програмирования // Автоматика, N4, 1993.
13. Еремин И.И., Астафьев А.И. Введение в теорию линейного и выпуклого прогрмирования. - М. -1976
14. Попов Ю.Д., Тюптя В.І., Шевченко В.І. Методи оптимізації. Навчальний посібник для студентів. Київ Абрис, 1999,-217с.