Карнаух Т.О., Ставровський А.Б.

Вступ до дискретної математики

Навчальний посібник

УДК 510.22

Передмова

Теорія множин – це розділ математики, який вивчає загальні властивості множин і є основою практично всіх математичних теорій, як "дискретних" дисциплін комп'ютерного циклу, так і класичних "континуальних" розділів математики. Саме у термінах теорії множин проводиться розподіл математичних об'єктів і теорій на континуальні та дискретні.

Автори посібника намагалися викласти частину математичного фундаменту, а саме теорію множин, на рівні, ***доступному початківцям***. Головна мета посібника – ознайомити читача з фундаментальними поняттями математики, навчити проводити коректні логічні міркування та грамотно користуватися логіко-математичною символікою, тобто ***математичною мовою***.

Окрім теоретичного матеріалу, посібник містить численні задачі для самостійної роботи, які супроводжуються відповідями, вказівками та розв'язаннями.

Усі задачі умовно можна поділити на ідейні та механічні. Ідейні задачі потребують для свого розв'язання певної ідеї, "родзинки"; механічні – знання означень, великої кількості формальних перетворень і вміння користуватися математичною мовою; при цьому механічні задачі істотно простіші за ідейні.

Дехто може запитати:"Навіщо розв'язувати механічні задачі, якщо в реальному житті доводиться мати справу переважно з ідейними задачами?" Проте розв'язування механічних задач – це дуже ефективний спосіб засвоєння нових понятть та оволодіння математичною мовою. Не володіючи технікою швидкого й правильного розв'язування простих задач, складної задачі не подолати. До того ж, оформлення розв'язань навіть простих задач привчає до грамотного й послідовного викладення думок, що знадобиться не тільки в науці, але й у житті.

Більшість задач, наведених у посібнику, є механічними. Складніші задачі відмічено позначкою *****.

Терміни, для яких наведено означення, у посібнику виділено ***курсивом***. Початок доведень і прикладів відмічено знаком ►, кінець – ◄. Обґрунтування логічних переходів у доведеннях інколи подано верхнім індексом (напр., ст. 23). У доведенні тверджень типу "тоді й тільки тоді, коли" знаки ($\Rightarrow$) та ($\Leftarrow$) позначають напрямок доведення.

ГЛАВА 1. Вступ. Початкові відомості

У цій главі наведено початкові відомості про логічні міркування, щоб далі користуватися мовою логіки як засобом формалізації математичного тексту. Ця глава не є вступом до математичної логіки. У ній лише на інтуїтивному рівні представлено поняття висловлення, висловлювальної форми, твердження, принципи побудови тверджень за допомогою логічних зв'язок і кванторів, а також загальні методи доведення теорем.

1.1. Інтуїтивне поняття твердження

У цьому розділі ми згадаємо окремі математичні об'єкти, відомі зі школи, і з їх допомогою розглянемо декілька понять логіки, потрібних надалі.

Математика — це величезна система знань, яка дає означення поняттям та встановлює зв'язки між ними. Математичні поняття є ***абстракціями*** об'єктів реального світу. Наприклад, ***число*** — це уявна абстракція кількості, притаманної реальному, фізичному світу. Школярам відомі ***множини чисел*** — натуральних N, цілих Z, раціональних Q, дійсних R.

Зв'язки між математичними поняттями виражаються у вигляді висловлень. ***Висловленням*** називають речення або вираз, про який можна говорити, що він є **а б о   і с т и н н и м , а б о   х и б н и м**.

Простим прикладом висловлення є рівність двох ариметичних виразів, в яких указано дії з числами (додавання, множення тощо). Якщо вирази мають однакові значення, тобто задають одне й те саме число, рівність вважається ***істинною***, інакше — ***хибною***. Наприклад, "$2\times2 = 4$" – істинна рівність, "$2\times2 = 5$" – хибна. Арифметичні нерівності теж є висловленнями, наприклад, "$2\times2 < 5$" (істинна) або "$2\times2 > 5$" (хибна).

Неформально, висловлення встановлює якийсь конкретний, **о д и н и ч н и й** факт. Висловлення притаманні не лише математиці – ними є також численні розповідні речення в природних мовах, наприклад, "Сонце випромінює світло". Проте нерозповідні речення (наказові та запитання) не є висловленнями. Існують також розповідні речення, істинність або хибність яких установити неможливо. Наприклад, ще давнім грекам був відомий так званий ***парадокс брехуна***: "Те, що я кажу, є хибним". Припустивши істинність цієї фрази, відразу маємо, що вона хибна, а припустивши хибність – що істинна.

Окрім висловлень, у математичних міркуваннях використовують так звані висловлювальні форми.

Висловлювальною формою називають вираз, який містить одну або кілька змінних і перетворюється на висловлення, якщо замість змінних підставити конкретні об'єкти (тобто значення – числа, моменти часу тощо).

Наприклад, у шкільній алгебрі розглядають ***змінні величини***, значеннями яких можуть бути числа з певної множини. Змінні разом з числами записують у ***алгебраїчних виразах***. Значення цих виразів

залежать від значень змінних. Відповідно, рівність з алгебраїчними виразами буде істинною або хибною залежно від значень змінних. Так, рівність "$x \times x = 4$" за значення $x = 2$ істинна ("$2\times2 = 4$"), а за значення 3 – хибна ("$3\times3 = 4$").

У природній мові також використовують речення, істинність яких може залежати від конкретних об'єктів, про які в ньому йдеться. Наприклад, речення "У Києві зараз ніч" є істинним або хибним залежно від (змінного) моменту часу, позначеного словом "зараз".

На відміну від висловлення, висловлювальна форма задає **с у к у п н і с т ь   ф а к т і в** – кожен з них пов'язано з конкретним набором значень змінних у формі. Саму по собі висловлювальну форму не можна розглядати як істинну чи хибну – такими мають бути конкретні висловлення, отримані з форми за конкретних значень змінних.

У математичних міркуваннях висловлення та висловлювальні форми часто використовують разом. Узагальнимо їх терміном ***твердження***, за необхідності підкреслюючи різницю між ними.

Твердження зі змінними x_1, x_2, …, x_n далі позначатимемо виразами вигляду $P(x_1, x_2, …, x_n)$ або просто P, коли в конкретних міркуваннях набір об'єктів x_1, x_2, …, x_n несуттєвий. Істинність або хибність твердження за конкретного набору об'єктів будемо називати ***значенням істинності***, або ***істиннісним значенням*** твердження на даному наборі. Якщо за деякого набору об'єктів x_1, x_2, …, x_n твердження $P(x_1, x_2, …, x_n)$ є істинним, то також будемо казати, що об'єкти x_1, x_2, …, x_n ***мають властивість*** P.

Твердження, істинне за довільного можливого набору значень змінних у ньому, називають ***тотожно-істинним***, наприклад, "$x = x$"[1]. Твердження, хибне за довільного можливого набору значень змінних, називають ***тотожно-хибним***, наприклад, "$x \neq x$". Тотожно-істинне твердження далі позначатимемо T (від англ. true – істина), а тотожно-хибне – F (false – хибність) або $\perp$.

У наступних розділах представлено засоби, за допомогою яких у математиці з простіших тверджень утворюються складніші.

1.2. Логічні зв'язки

1.2.1. Запис логічних зв'язок

У природній мові за допомогою сполучників і певних мовних конструкцій утворюють складні речення. Аналогічно цьому в математиці для побудови складних тверджень користуються так званими логічними зв'язками. Сполучникам "і", "або" та мовним конструкціям "неправда, що …", "якщо …, то …", "тоді й тільки тоді, коли" у логіці відповідають логічні зв'язки – знаки $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$, ~.

У цьому підрозділі нас не цікавитиме внутрішній устрій тверджень, які сполучаються зв'язками, тому позначатимемо твердження великими

[1] Під знаком "=" тут мається на увазі звичайна рівність

літерами P, Q, R тощо.[2] Розглянемо складні твердження з наведеними зв'язками та означимо їх істинність залежно від істинності простих тверджень.

1. Складне твердження "P і Q" позначають $P\wedge Q$ й називають кон'юнкцією (або логічним добутком) тверджень P і Q. Наприклад, якщо P – це "сонце світить", Q – "птахи співають", то $P\wedge Q$ – "сонце світить і птахи співають". Якщо обидва твердження P і Q істинні, то твердження $P\wedge Q$ вважається істинним, інакше – хибним. Замість символу $\wedge$ інколи використовують символ & або кому.

2. Твердження вигляду "P або Q" позначають $P\vee Q$ й називають ***диз'юнкцією*** (або ***логічною сумою***) тверджень P і Q. Наприклад, якщо P – це "світить сонце", Q – "йде дощ", то $P\vee Q$ – це "світить сонце або йде дощ". Твердження $P\vee Q$ вважається істинним, якщо хоча б одне з тверджень P або Q є істинним, інакше – хибним.

3. Твердження "неправда, що P" (або просто "не P") позначають $\neg P$ й називають ***запереченням*** твердження P. Наприклад, якщо P – це "світить сонце", то $\neg P$ – це "неправда, що сонце світить", тобто "сонце не світить". Твердження $\neg P$ істинне, якщо P хибне, і навпаки.

4. Твердження "якщо P, то Q" позначають $P\to Q$ та називають ***імплікацією*** із ***засновком*** (***припущенням***) P та ***висновком*** Q. Наприклад, за P – "собака гавкає", Q – "господар не спить" $P\to Q$ позначає "якщо собака гавкає, то господар не спить". Твердження $P\to Q$ є хибним, якщо P є істинним і Q – хибним, інакше воно є істинним.

Інколи $P\to Q$ позначає твердження вигляду "з P випливає Q", "P тільки тоді, коли Q" або "Q тоді, коли P".

Зауваження. Імплікація з хибною умовою завжди істинна. Інколи кажуть, що **з хибних припущень може випливати все що завгодно** (як хибність, так і істина). Імплікація також виражає, що **з істинних припущень не може випливати хибний висновок.**

Якщо імплікація $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\to Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є істинною за всіх можливих наборів значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то кажуть, що з P ***слідує*** Q, або що Q є ***необхідною умовою*** для P, а P – ***достатньою умовою*** для Q. Цей факт позначають як $P\Rightarrow Q$.

5. Твердження "P тоді й тільки тоді, коли Q" позначають $P\sim Q$ та називають ***еквіваленцією*** тверджень P і Q. Наприклад, якщо P – "Петро добре складає іспит", Q – "Він добре вчиться в семестрі", то $P\sim Q$ – це "Петро добре складає іспит тоді й тільки тоді, коли він добре вчиться в семестрі". $P\sim Q$ є істинним, якщо обидва твердження P і Q є хибними або є істинними. Замість символу ~ інколи використовують символ $\leftrightarrow$.

[2] На них можна дивитися як на змінні з можливими значеннями "хибність" або "істина".

Якщо твердження $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за кожного з можливих наборів значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є або одночасно хибними, або одночасно істинними, то про твердження P і Q кажуть, що вони ***еквівалентні***, або ***рівносильні***, і позначають це як $P\Leftrightarrow Q$ або $P\equiv Q$.

Розглянемо узгодження, що дозволяють скорочувати запис тверджень. Логічні зв'язки упорядковуються за "силою тяжіння" подібно до знаків арифметичних операцій. Всі розуміють, що вираз $1+2\times 3$ позначає суму 1 і 2×3, а не добуток $1+2$ і 3, тобто знак множення "притягується" сильніше за знак додавання. Зв'язка $\neg$ вважається найсильнішою, тобто $\neg A\wedge B$ є скороченням від $(\neg A)\wedge B$, а не від $\neg(A\wedge B)$. Далі за спаданням "сили тяжіння" двомісні зв'язки йдуть у такому порядку: $\wedge$, $\vee$, $\to$, ~. Отже, твердження $A\vee B\wedge C$ можна розглядати, як скорочений запис $A\vee(B\wedge C)$, а $A\sim B\to C\vee A$ – як $A\sim(B\to(C\vee A))$. Саму "силу тяжіння" зв'язки називають ***пріоритетом***. Отже, розглянуті зв'язки $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, ~ розташовано в порядку спадання пріоритету.

Приклад 1.1. Записати логіко-математичною символікою (істинне) твердження "Фігура $ABCD$ є квадратом тільки тоді, коли вона є прямокутником".

► Розкладемо задане твердження на простіші: $P(x)$ – це "x є квадратом" та $Q(x)$ – "x є прямокутником". Тоді задане твердження можна записати як $P(ABCD)\to Q(ABCD)$. ◄

1.2.2. Таблиці істинності

Якщо відома істинність тверджень, з яких за допомогою логічних зв'язок утворено складне твердження, то про його істинність можна дізнатися з означень попереднього підрозділу. Запишемо всі можливі набори істинності складових тверджень, які сполучаються логічними зв'язками, і представимо істинність складених тверджень стовпчиками такої ***таблиці істинності*** (табл 1).

Таблиця 1

P	Q	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$\neg P$	$P\to Q$	$P\sim Q$
хибне	хибне	хибне	хибне	істинне	істинне	істинне
хибне	істинне	хибне	істинне	істинне	істинне	хибне
істинне	хибне	хибне	істинне	хибне	хибне	хибне
істинне	істинне	істинне	істинне	хибне	істинне	істинне

Ця таблиця дозволяє визначити істинність довільних тверджень, утворених за допомогою зв'язок $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$, ~.

Приклад 1.2. Побудувати таблиці істинності тверджень $\neg(P\wedge Q)$, $\neg P\vee\neg Q$ та $\neg P\vee Q$.

► Спочатку за зведеною таблицею заповнимо таблиці допоміжних тверджень $P\wedge Q$, $\neg P$ та $\neg Q$. Потім, використовуючи їх значення, заповнимо табл. 2:

Таблиця 2

P	Q	$P\wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg P\vee Q$
хибне	хибне	хибне	істинне	істинне	істинне	істинне	істинне
хибне	істинне	хибне	істинне	хибне	істинне	істинне	істинне
істинне	хибне	хибне	хибне	істинне	істинне	істинне	хибне
істинне	істинне	істинне	хибне	хибне	хибне	хибне	істинне

◄

1.2.3. Еквівалентність виразів з логічними зв'язками

Нехай два твердження побудовано за допомогою логічних зв'язок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ~ з деяких простіших тверджень. Для висновку про їх еквівалентність достатньо перевірити, що їх значення істинності збігаються при кожному можливому наборі значень істинності складових тверджень. Для перевірки можна скористатися таблицями істинності – якщо стовпчики значень істинності досліджуваних тверджень однакові, то твердження еквівалентні.

З прикладу 1.2 видно, що стовпчики значень істинності тверджень $\neg(P\wedge Q)$ та $\neg P\vee\neg Q$ однакові. Отже, ці твердження еквівалентні, тобто $\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q$. Еквівалентними є також твердження $P\rightarrow Q$ та $\neg P\vee Q$.

За довільних тверджень P, Q, R справджуються такі еквівалентності (їх прийнято називати ***законами***).

1. Закони ***комутативності***: $P\wedge Q \Leftrightarrow Q\wedge P$, $P\vee Q \Leftrightarrow Q\vee P$.
2. Закони ***асоціативності***: $(P\wedge Q)\wedge R \Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$, $(P\vee Q)\vee R \Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$.
3. Закони ***дистрибутивності*** кон'юнкції відносно диз'юнкції та диз'юнкції відносно кон'юнкції:

$P\wedge(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$, $P\vee(Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$.

4. Закони ***ідемпотентності***: $P\wedge P \Leftrightarrow P$, $P\vee P \Leftrightarrow P$.
5. Закони ***поглинання***: $P\wedge(P\vee Q) \Leftrightarrow P$, $P\vee(P\wedge Q) \Leftrightarrow P$.
6. Властивості всюди істинних та всюди хибних тверджень:

$P\wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow P$, $P\vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$, $P\wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$, $P\vee \mathrm{F} \Leftrightarrow P$, $\neg \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{T}$, $\neg \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{F}$.

7. Закони ***де Моргана***: $\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q$, $\neg(P\vee Q) \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q$.
8. Закон ***подвійного заперечення***: $\neg\neg P \Leftrightarrow P$.
9. Закон ***виключення третього***: $P\vee\neg P \Leftrightarrow \mathrm{T}$.
10. Закон ***суперечності***: $P\wedge\neg P \Leftrightarrow \mathrm{F}$.
11. Закон ***контрапозиції***: $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q\rightarrow \neg P$.

Для доведення цих законів достатньо розглянути таблиці істинності тверджень у відповідних парах.

Твердження $Q\rightarrow P$ називають ***оберненим*** до твердження $P\rightarrow Q$ (***прямого***), твердження $\neg P\rightarrow\neg Q$ – ***протилежним***, а $\neg Q\rightarrow\neg P$ – ***протилежним до оберненого***.

За законом контрапозиції, **пряме та протилежне до оберненого твердження є еквівалентними**. Цей факт часто використовують для доведення тверджень, оскільки в багатьох випадках пряме твердження довести важко, а протилежне до оберненого – легко.

Водночас, значення істинності прямого твердження $P\rightarrow Q$ та оберненого $Q\rightarrow P$ можуть як збігатися (за однакових значень істинності P і Q), так і відрізнятися (за різних значень P і Q). Отже, пряме та обернене твердження, взагалі кажучи, не є еквівалентними.

Окрім законів 1–11, у математичних міркуваннях часто використовують такі.

12. $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P\vee Q$.
13. $P\sim Q \Leftrightarrow (P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$, $P\sim Q \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$.

Кілька інших важливих законів представлено в наступному розділі.

Увага! Для з'ясування, що твердження зі змінними не еквівалентні, перевірка таблиць істинності не завжди придатна. Наприклад, розглянемо два твердження: перше – "($x=1$ або $x\neq 1$) **та** ($x=2$ або $x\neq 2$)", друге – "($x=1$ або $x\neq 1$) **або** ($x=2$ або $x\neq 2$)". Через P позначимо твердження "$x=1$ або $x\neq 1$", через Q – "$x=2$ або $x\neq 2$". Тоді наші твердження матимуть вигляд $P\wedge Q$ та $P\vee Q$. Таблиці істинності в них різні, і здається, що вони нееквівалентні. Проте за будь-якого значення x твердження P і Q істинні, звідки істинними є обидва твердження $P\wedge Q$ і $P\vee Q$, тобто насправді **вони еквівалентні**!

Отже, щоб довести нееквівалентність тверджень P і Q про об'єкти x_1, x_2, …, x_n, необхідно вказати такий можливий набір об'єктів x_1, x_2, …, x_n, за якого досліджувані твердження мають різні значення істинності, або хоча б довести, що такий набір існує.

1.3. Квантори $\forall$ та $\exists$

Для вираження математичних та інших знань необхідні твердження певної структури, яку не можна представити за допомогою лише логічних зв'язок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ~. Ось приклади: "Кожна людина смертна" та "Існує розв'язок рівняння x^2-4 = 0". Причиною є слова "кожна" та "існує". Для запису тверджень такого роду використовують, як правило, висловлювальні форми та спеціальні символи – ***квантори***.

1.3.1. Твердження з кванторами

Твердження з кванторами мають одну з двох можливих загальних структур.

Першою структурою є "за кожного можливого значення змінної справджується (є істинним) висловлення, отримане з висловлювальної форми при цьому значенні змінної". Якщо висловлювальну форму зі змінною x позначити $P(x)$, то наведене твердження записують у вигляді $\forall x\ P(x)$.

Наприклад, припустивши, що x позначає людину, а $D(x)$ – "людина смертна", для наведеного вище речення "Кожна людина смертна" отримаємо позначення $\forall x\ D(x)$. За припущення, що x приймає дійсні значення, очевидним є істинне твердження $\forall x\ ((-x)^2 = x^2)$.

Отже, знак $\forall$ позначає слова "***для кожного*** можливого значення" або "***за всіх*** можливих значень" або "***за будь-якого*** можливого значення". Він є першою літерою німецького слова All (все, всі), записаною догори ногами, і називається ***квантором загальності***. Термін "квантор" походить від англійського "quantify" – "визначати кількість".

Твердження вигляду $\forall x\, P(x)$ є **в и с л о в л е н н я м**[3], тобто виражає одиночний факт. Воно є істинним тоді й тільки тоді, коли твердження P є істинним **з а в с і х** можливих значень змінної x. Воно визначає одиничний факт – істинність **у с і х** висловлень, які одержуються за конкретних значень змінної. По суті, його істинність **н е з а л е ж и т ь** від значення змінної, тому кажуть, що квантор $\forall x$ **з в ' я з у є з м і н н у** x у висловлювальній формі $P(x)$. Входження змінної x у $P(x)$ називають ***зв'язаним***.[4]

Інша структура тверджень має вигляд "існує значення змінної, за якого справджується (є істинним) висловлення, отримане з висловлювальної форми при цьому значенні змінної". Речення з такою структурою записують у вигляді $\exists x\, P(x)$.

Наприклад, твердження "Існує розв'язок рівняння $x^2 - 4 = 0$" можна позначити як $\exists x\, (x^2 - 4 = 0)$.

Твердження вигляду $\exists x\, P(x)$ також є **в и с л о в л е н н я м**, істинним тоді й тільки тоді, коли твердження P істинне **х о ч а б п р и о д н о м у** значенні змінної x. Наприклад, $\exists x\, (x^2 - 4 = 0)$ є істинним, оскільки істинно $2^2 - 4 = 0$ при $x = 2$ або $(-2)^2 - 4 = 0$ при $x = -2$. Твердження про існування від'ємних квадратів дійсних чисел, $\exists x\, (x^2 < 0)$, очевидно, хибне.

Знак $\exists$ називається ***квантором існування***; він є перевернутою першою літерою німецького слова Existenz (існування). Ним також позначають мовну конструкцію "***за деякого***".

Дописування квантора зі змінною до висловлювальної форми з цією змінною називають ***навішуванням квантора на змінну***. Якщо форма залежить від кількох змінних, навішування квантора на одну з них залишає твердження висловлювальною формою, оскільки його істинність залежить від значень змінних, незв'язаних квантором (***вільних у цьому твердженні***). Наприклад, нехай значення змінних – довільні дійсні числа. Твердження $\forall x\, (x^2+y^2 \geq 1)$ є висловлювальною формою, залежною від y. Дійсно, якщо значення y задовольняє нерівність $|y| \geq 1$, то відповідне висловлення, наприклад, $\forall x\, (x^2+2^2 \geq 1)$ при $y = 2$, є істинним. Якщо ж $|y| < 1$, відповідне висловлення хибне.

Навішування кванторів на всі змінні, присутні у висловлювальній формі, утворює висловлення. Наприклад, за дійсних значень змінних вираз $\forall x\, \exists y\, (x+y > 0)$ позначає речення "за будь-якого x існує y, при якому справджується нерівність $x+y > 0$". Очевидно, що воно є істинним. Проте твердження $\exists x\, \forall y\, (x+y > 0)$, тобто "існує x, при якому для всіх y

---

[3] Нагадаємо, що висловлення це речення або вираз, про який можна говорити, що він є або істинним, або хибним

[4] Твердження з квантором може бути частиною іншого, складнішого виразу, в якому появи цієї змінної можуть бути ***незв'язаними*** (***вільними***). Детальніше див., напр., [3]

справджується нерівність $x+y > 0$", є хибним. Взагалі, оцінка істинності тверджень з кванторами є, як правило, складною й нетривіальною задачею.

У деяких твердженнях квантори вживаються **н е я в н о**. Зокрема, зі шкільної алгебри нам відомі ***тотожності*** – алгебраїчні рівності, істинні **з а б у д ь - я к и х** дійсних значень своїх змінних. Наприклад, у тотожності "$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$" насправді неявно присутні квантори:

$\forall a\, \forall b\, ((a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$.

Зауваження. З використанням кванторів можна дати еквівалентне означення тотожно-істинного твердження: твердження $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – тотожно-істинне, якщо істинним є твердження $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Аналогічно,

$$(P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall x_1\, \forall x_2 \ldots \forall x_n\, (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to Q(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

і

$$(P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall x_1\, \forall x_2 \ldots \forall x_n\, (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Утворюючи твердження з логічними зв'язками та кванторами, щоб не писати зайвих дужок, вважатимемо, що квантори $\exists$ та $\forall$ мають пріоритет, вищий за зв'язки $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\sim$. Розглянемо приклади тверджень та їх запису логіко-математичною символікою.

"Існує x, при якому $P(x)$ є хибним" – $\exists x\, \neg P(x)$.

"«Існує x, при якому $P(x)$» є хибним" – $(\exists x\, P(x)) \sim$ F або, ураховуючи пріоритети, $\exists x\, P(x) \sim$ F.

Приклад 1.3. Записати твердження "Усі риби, крім акул, ставляться добре до людей" логіко-математичною символікою, розклавши його на простіші складові.

► Виділимо складові частини твердження: $P(x)$ – "x є рибою", $Q(x)$ – "x є акулою", $R(x)$ – "x добре ставиться до людей". Запишемо наше твердження:

$\forall x\, ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \to R(x))$. ◄

Приклад 1.4. Записати твердження "Якщо хтось може скласти іспит, то й Петро може" логіко-математичною символікою, розклавши його на складові.

► Виділимо складові частини: $P(x)$ – "x може скласти іспит". Частина "Петро може" виглядатиме як P(Петро). Запишемо наше твердження:

$(\exists x\, P(x)) \to P$(Петро). ◄

1.3.2. Деякі властивості кванторів

У цьому підрозділі наведено кілька логічних висновків та еквівалентностей, пов'язаних з кванторами.

1. Закони ***комутативності однойменних кванторів***:

$\forall x\, \forall y\, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, P(x, y)$,

$\exists x\, \exists y\, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, P(x, y)$.

На відміну від однойменних, різнойменні квантори в загальному випадку не комутують. Має місце лише логічний висновок

$\exists x\ \forall y\ P(x, y) \Rightarrow \forall y\ \exists x\ P(x, y)$.

Ліва частина стверджує, що деяке значення x задовольняє **всі** значення y. Проте у правій частині для кожного значення y існує деяке "прийнятне" значення x, тобто для різних значень y відповідні значення x можуть бути різними! Наприклад, нехай $P(x, y)$ – це "$x = y$", а значення x, y – дійсні числа. Тоді твердження $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$, або $\exists x\ \forall y\ x = y$, є хибним, оскільки жодне дійсне число не може бути рівним усім іншим. Водночас, твердження $\forall y\ \exists x\ P(x, y)$, або $\forall y\ \exists x\ x = y$, є істинним, оскільки кожне дійсне число дорівнює самому собі.

2. Закони ***де Моргана*** для кванторів:

$\neg(\forall x\ P(x)) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$,

$\neg(\exists x\ P(x)) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)$.

3. Закони ***дистрибутивності*** кванторів:

$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$,

$\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$.

У загальному випадку квантор існування не є дистрибутивним відносно кон'юнкції, а квантор загальності – відносно диз'юнкції.

► Нехай $P(x)$ – це "$x = 1$", $Q(x)$ – "$x \neq 1$", де під x розуміється дійсне число. Тоді твердження $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$ є істинним, $\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$ – хибним, і $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$. Твердження $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ є хибним, а $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$ – істинним, оскільки, $1 = 1$ та $2 \neq 1$ – істинні твердження. Звідси $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \not\Leftrightarrow \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$. ◄

В той же час мають місце такі співвідношення:

$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$,

$\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x) \Rightarrow \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$.

4. Якщо ім'я y не входить до твердження P, а ім'я x не входить до твердження Q, то

$\forall x\ \forall y\ (P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow \forall x\ P(x) \wedge \forall y\ Q(y)$,

$\forall x\ \forall y\ (P(x) \vee Q(y)) \Leftrightarrow \forall x\ P(x) \vee \forall y\ Q(y)$,

$\exists x\ \exists y\ (P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow \exists x\ P(x) \wedge \exists y\ Q(y)$,

$\exists x\ \exists y\ (P(x) \vee Q(y)) \Leftrightarrow \exists x\ P(x) \vee \exists y\ Q(y)$.

5. Якщо $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, то

$\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ Q(x)$,

$\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ Q(x)$.

6. Якщо $P(x) \Rightarrow Q(x)$, то

$\forall x\ P(x) \Rightarrow \forall x\ Q(x)$,

$\exists x\ P(x) \Rightarrow \exists x\ Q(x)$.

7. Якщо $P(x)$ – деяке твердження про об'єкт x і ім'я y в твердженні P не зустрічається, то

$\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \forall y\ P(y)$,

$\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \exists y\ P(y)$,

$\forall x\ P(x) \Rightarrow P(a)$,

$P(a) \Rightarrow \exists x\ P(x)$.

Тут $P(y)$ – твердження, отримане з твердження $P(x)$ (у ньому можуть бути й інші змінні) одночасною заміною всіх входжень **змінної** x на **змінну** y. $P(a)$ – твердження, утворене заміною **змінної** x на **значення** a. Наприклад, нехай $P(x)$ – це "$x > 2$ або $x+z \leq 0$". Тоді $P(y)$ – це "$y > 2$ або $y+z \leq 0$", $P(1)$ – "$1 > 2$ або $1+z \leq 0$".

Перші два співвідношення виражають такий факт: при заміні в усьому твердженні імені зв'язаної змінної на **інше** ми отримуємо еквівалентне твердження. Третє: якщо твердження справджується для всіх об'єктів, то справджується й для деякого фіксованого. Четверте – якщо твердження є істинним для фіксованого об'єкта, то існує об'єкт, для якого воно справджується.

Співвідношення, аналогічні наведеним, можна поширити на складніші випадки, але це вимагає строгих означень, які є в підручниках з математичної логіки. Тут зробимо лише два зауваження.

По-перше, підставляти вираз можна тільки на місця **вільних входжень** змінної в P (не зв'язаних у P кванторами). Наприклад, вирази 1 або $1+z$ можна підставити в твердження $\forall y\ (x = y)$ на місце вільного входження x і не можна на місце зв'язаного y.

По-друге, якщо у твердженні, в яке підставляється вираз, і в цьому виразі є спільна змінна, то її входження в твердження P також мають бути вільними. Наприклад, твердження $\neg\forall y\ (x = y)$ є **істинним** за будь-якого дійсного значення x. Якщо замість x підставити вираз y (змінну y зв'язано в твердженні!), утвориться **хибне** твердження $\neg\forall y\ (y = y)$. Якщо в твердження $\forall y\ (x = y)$, **хибне** для всіх дійсних значень x, замість x підставити y, утвориться **істинне** твердження $\forall y\ (y = y)$.

8. $P(x)$ є тотожно-істинним твердженням тоді й тільки тоді, коли $\forall x\ P(x)$ є істинним твердженням (або тотожно-істинним, якщо $P(x)$ містить інші змінні).

Розглянемо приклад доведення співвідношень з кванторами.

Приклад 1.5. $\neg(\forall x\ P(x)) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$

► Припустимо, що твердження $\neg(\forall x\ P(x))$ є істинним. Тоді твердження $\forall x\ P(x)$ є хибним. Тоді $P(x)$ є істинним не за всіх можливих значень x, тобто за деякого значення a твердження $P(a)$ є хибним. Це означає, що твердження $\exists x\ \neg P(x)$ також є істинним.

Аналогічно, якщо твердження $\neg(\forall x\ P(x))$ є хибним, то твердження $\forall x\ P(x)$ є істинним і $P(x)$ є істинним за всіх можливих значень x. У цьому випадку твердження $\neg P(x)$ є хибним за всіх можливих значень x. Звідси не існує такого значення x, за якого $\neg P(x)$ є істинним. Тоді твердження $\exists x\ \neg P(x)$ – хибне. Отже, $\neg(\forall x\ P(x)) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$. ◄

1.4. Елементи теорії доведень

В цьому розділі ми розглянемо питання отримання висновків у міркуваннях, зокрема доведення істинності тверджень.

1.4.1. Логічні висновки

І в звичайному житті, і в математиці доводиться з'ясовувати, чи випливає істинність деякого твердження з істинності одного або кількох інших, тобто чи є це твердження їх ***логічним висновком***.

Приклад 1.6. Припустимо, що купівельна спроможність грошей падає, якщо зростають податки, і що люди незадоволені, коли падає купівельна спроможність грошей. Припустимо також, що податки зростають. Покажемо, як за цих припущень за допомогою логічних законів дійти висновку, що люди незадоволені.

Позначимо твердження літерами: A – "податки зростають", B – "купівельна спроможність грошей падає", C – "люди незадоволені". Тоді припущення виражається так: $(A\to B)\wedge(B\to C)\wedge A$. Доведемо, що за його істинності твердження C теж істинне. Дійсно, $(A\to B)\wedge(B\to C)\wedge A \Leftrightarrow A\wedge B\wedge C$. Отже, припущення рівносильне твердженню $A\wedge B\wedge C$. Але воно істинне тільки тоді, коли кожний співмножник істинний – тоді твердження C є істинним. Отже, з істинності тверджень $A\to B$, $B\to C$ і A випливає істинність C.

Твердження Q називають ***логічним висновком*** тверджень $P_1, P_2, \ldots, P_n$, якщо $P_1\wedge P_2\wedge\ldots\wedge P_n \Rightarrow P$, при цьому твердження $P_1, P_2, \ldots, P_n$ називають ***умовами*** (***засновками***) Q.

Позначимо кон'юнкцію $P_1\wedge P_2\wedge\ldots\wedge P_n$ через P. Твердження Q є логічним висновком тверджень $P_1, P_2, \ldots, P_n$, тоді й тільки тоді, коли $P \Rightarrow Q$, тобто коли твердження $P\to Q$ є тотожно-істинним. Оскільки імплікація хибна тоді й тільки тоді, коли її засновок істинний, а висновок хибний, то для перевірки тотожної істинності твердження $P\to Q$ достатньо впевнитись, що твердження Q істинне на всіх тих наборах об'єктів, на яких істинне твердження P.

Крім безпосередньої перевірки тотожної істинності твердження $P\to Q$, можна виділити в ньому складові твердження та використати таблицю істинності або інші методи, наведені в цьому розділі.

Наприклад, неважко переконатися в правильності таких логічних висновків:

$P\wedge Q \Rightarrow P$, $P\wedge Q \Rightarrow Q$,

$P \Rightarrow P\vee Q$, $Q \Rightarrow P\vee Q$.

Отже, твердження P та Q є логічними висновками $P\wedge Q$, а $P\vee Q$ – логічним висновком Q та P. Наведені логічні висновки інколи застосовуються в доведенні тверджень.

Також має місце логічний висновок

$(P \wedge (P\to Q)) \Rightarrow Q$.

Наведений факт відіграє дуже важливу роль. Він дозволяє за умови істинності тверджень P та $P\to Q$ стверджувати про істинність твердження Q. Ця схема міркувань займає важливе місце у логіці і має спеціальну назву: ***modus ponens*** (***правило відокремлення***)

1.4.2. Теореми

Розглянемо на інтуїтивному рівні принцип будови сучасних математичних теорій. Найчастіше математична теорія починається з системи означень, яка описує об′єкти теорії та деякі їх базові властивості й зв′язки між ними. Так, у математичному аналізі система означень охоплює об′єкти (дійсне число, послідовність дійсних чисел, дійсна функція і т. п.), властивості (*збіжність* послідовності дійсних чисел, *неперервність* функції тощо) та зв′язки між ними (дійсне число *є границею* послідовності дійсних чисел тощо). При цьому означення дозволяють конструювати одні об′єкти з інших.

Система означень задає, як правило, не всі властивості і зв′язки, що існують в математичній теорії, а лише деякі базові (або первинні). Решта існуючих властивостей та зв′язків встановлюється за допомогою **тверджень про об′єкти теорії**. Отже, при аналізі тотожної істинності чи хибності твердження або при обчисленні істиннісного значення твердження з кванторами можливі значення змінних твердження **обмежено об′єктами теорії**.

З формального погляду, кожне означення[5] теорії можна сформулювати у вигляді твердження без входжень вільних змінних. Означення теорії вважають істинними **апріорі**. Решта істинних фактів теорії формулюється у вигляді теорем.

Теореми теорії – це істинні твердження про об′єкти теорії, що в найбільш загальному випадку мають вигляд $\forall x_1\, \forall x_2 \ldots \forall x_n\, P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де P – деяке твердження, можливо з кванторами. Відповідно фрази "довести, що твердження є теоремою теорії", або скорочено "довести твердження" чи "довести теорему", означають, що необхідно довести істинність відповідного твердження. Інколи теорему природно формулюють у вигляді $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, маючи на увазі $\forall x_1\, \forall x_2 \ldots \forall x_n\, P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Теореми доводяться, виходячи з означень та раніше доведених фактів. Доведення проводять шляхом логічних міркувань, основаних на правилах математичної логіки. Як правило, у доведенні користуються як природною мовою, так і певними логічними формами, тобто доведення є **формалізованим**.

Часто теореми складаються з двох частин – ***умови*** (***гіпотези***) H та ***висновку*** C, тобто теорема є твердженням вигляду "якщо H, то C", яке повинно виконуватись для всіх об′єктів теорії, тобто $H \Rightarrow C$. При цьому умова H може мати вигляд $H_1\wedge H_2\wedge\ldots\wedge H_n$, тобто $H \Leftrightarrow H_1\wedge H_2\wedge\ldots\wedge H_n$. Інколи теореми формулюють інакше, проте ця структура, хоча й неявно, усе одно в них присутня. Наприклад, теорему Піфагора можна сформулювати так: "У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів

[5] У контексті аксіоматичних теорій математичної логіки означення є аналогом аксіоми.

катетів". Формулювання з чіткіше висловленою гіпотезою більш громіздке: "Якщо трикутник є прямокутним, то квадрат сторони, протилежної до прямого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін".

Інколи разом з прямим твердженням теореми, $H \Rightarrow C$, наводять обернене $C \Rightarrow H$ ($H \Rightarrow C \wedge C \Rightarrow H$ або $H \Leftrightarrow C$ [6]). Тоді теорема має структуру "*H* тоді й тільки тоді, коли *C*" (для всіх об′єктів теорії) або "для *H* необхідно й достатньо *C*". Такі теореми фактично складаються з двох тверджень, які найчастіше доводяться окремо.

1.4.3. Доведення теорем

Як і у випадку перевірки логічного висновку, для доведення теорем теорії можна безпосередньо перевірити (якщо це можливо) усі можливі набори значень змінних, що фігурують у її формулюванні, або виділити складові твердження та використати таблицю істинності. Але існують й інші, більш ефективні методи.

Зокрема, можна використати такий метод. Розглянемо твердження вигляду $H \Rightarrow C$. Якщо *H* і *C* залежать від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то це твердження означає, що при будь-якому можливому наборі значень цих змінних імплікація $H(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є істинною. Якщо за якогось набору умова *H* є хибною, то імплікація істинна. Але якщо за деякого набору умова *H* істинна, то імплікація буде істинною, тільки якщо висновок *C* також буде істинним. Отже, щоб довести теорему, достатньо розглянути довільний можливий набір значень змінних, які входять у твердження теореми, припустити, що умова теореми істинна, і довести, що її висновок теж істинний. Інакше кажучи, необхідно довести, що *C* є тотожно-істинним твердженням за умови, що як можливі значення його змінних розглядаються лише ті об′єкти теорії, за яких є істинним *H*.

Звичайно, доведення необхідно проводити, використовуючи ***коректні схеми*** міркувань, тобто ті, що не дозволяють з істинних припущень одержати хибні висновки.

Методів доведення теорем існує не так і багато: пряме (безпосереднє), від супротивного та кілька індуктивних. Як правило, ці методи застосовують у комбінаціях. Доведення від супротивного та найпростіший варіант індукції розглянуто в наступних підрозділах. Численні приклади доведень представлено в подальших главах.

Пряме (безпосереднє) доведення полягає в побудові ланцюга істинних тверджень теорії, в якому кожне наступне твердження є або означенням, або логічним висновком одного або кількох попередніх. Останнім є твердження теореми.

Прикладом прямого доведення теорем вигляду $H \Leftrightarrow C$ є ***метод еквівалентних перетворень***. Припустимо, що встановлено еквівалентність тверджень *P* і *Q*, тобто $P \Leftrightarrow Q$. Нехай твердження $F(P)$

---

[6] $((H \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow H)) \Leftrightarrow (H \Leftrightarrow C)$, оскільки $(\forall x\,(H \to C) \wedge \forall x\,(C \to H)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall x\,(H \sim C)$

утворено з твердження *P* та деяких інших тверджень. Якщо в $F(P)$ замінити входження *P* на *Q*, то утвориться твердження $F(Q)$. Твердження $F(P)$ і $F(Q)$ також еквівалентні. Наприклад, якщо $P \Leftrightarrow Q$, то $P \wedge R \Leftrightarrow Q \wedge R$, $P \vee R \Leftrightarrow Q \vee R$. Цей факт лежить в основі доведення рівносильності тверджень шляхом ***еквівалентних перетворень***. Проілюструємо його.

Приклад 1.7. Довести $\neg(A \to B) \wedge \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B)$.

► Для доведення скористаємося законами з підрозділу 1.2.3.

$\neg(A \to B) \wedge \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow$ [7]

$\Leftrightarrow (\neg\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A \wedge (\neg B) \wedge (\neg A)) \vee (A \wedge (\neg B) \wedge (\neg B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A \wedge (\neg A) \wedge (\neg B)) \vee (A \wedge (\neg B)) \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee (A \wedge (\neg B)) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B)$.

Отже, $\neg(A \to B) \wedge \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B)$. ◄

При доведенні методом еквівалентних перетворень використовують таке коректне правило

якщо $P_1 \Leftrightarrow P_2, P_2 \Leftrightarrow P_3, \ldots, P_{n-1} \Leftrightarrow P_n$, то $P_1 \Leftrightarrow P_n$.

Для теорем вигляду $H \Rightarrow C$ пряме доведення полягає в побудові ланцюга тверджень теорії, в якому кожне наступне твердження є або означенням, або гіпотезою *H* теореми, або логічним висновком одного або кількох попередніх. Останнім є висновок *C* теореми.

Таке пряме доведення основане на наступній коректній схемі міркувань: якщо $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$, то $P_1 \Rightarrow P_3$. Її неважко узагальнити до вигляду[8]:

якщо $P_1 \Rightarrow P_2, P_2 \Rightarrow P_3, \ldots, P_{n-1} \Rightarrow P_n$, то $P_1 \Rightarrow P_n$.

Припустимо, що встановлено слідування $P \Rightarrow Q$ й твердження $F(P)$ утворено з твердження *P* та деяких інших тверджень тільки за допомогою кванторів і зв'язок $\vee$ та $\wedge$. Замінивши у $F(P)$ входження *P* на *Q*, отримаємо твердження $F(Q)$. Тоді справджується $F(P) \Rightarrow F(Q)$. Наприклад, якщо $P \Rightarrow Q$, то $P \wedge R \Rightarrow Q \wedge R$, $P \vee R \Rightarrow Q \vee R$.

Увага! Якщо до твердження $F(P)$ входять зв'язки $\neg$, $\to$, ~, то вказана властивість може й не виконуватися.

Приклад 1.8. Довести $A \wedge (A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow C$.

► Теорема має три гіпотези: *A*, $(A \to B)$ та $(B \to C)$. Застосувавши до перших двох гіпотез правило modus ponens, отримаємо твердження *B*. Застосувавши правило modus ponens до *B* та $(B \to C)$ отримаємо твердження *C*.

По суті теж саме доведення можна записати в іншій формі:

$A \wedge (A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow B \wedge (B \to C) \Rightarrow C$.

Отже, $A \wedge (A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow C$. ◄

---

[7] Замість $P_1 \Leftrightarrow P_2$, $P_2 \Leftrightarrow P_3$, …, $P_{n-1} \Leftrightarrow P_n$ будемо писати $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P_3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow P_{n-1} \Leftrightarrow P_n$

[8] Замість $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$, …, $P_{n-1} \Rightarrow P_n$ будемо писати $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow P_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_{n-1} \Rightarrow P_n$

Найважчим у побудові ланцюга висновків є пошук проміжних тверджень. Як правило, в цьому мистецтві допомагає **добре знання означень та відомих істинних тверджень теорії**. Інколи буває достатньо виписати означення понять, присутніх у теоремі, щоб ланцюг висновків став зрозумілим. Інколи цей ланцюг легше побудувати, якщо відшукати умову, з якої випливає висновок теореми, потім умову, з якої випливає знайдена умова тощо, доки не отримаємо умову теореми.

Для доведення теореми вигляду $H \Leftrightarrow C$ інколи будують не ланцюг рівносильностей $\Leftrightarrow$, а два ланцюги логічних висновків $\Rightarrow$.

Деякі теореми встановлюють рівносильність не двох, а більшої кількості висловлень. Для доведення достатньо довести замкнений ланцюг їх слідувань на основі такого правила:

якщо $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$, …, $P_{n-1} \Rightarrow P_n$, $P_n \Rightarrow P_1$, то $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow P_n$.

Інколи теорему вигляду $H \Rightarrow C$ легше довести, якщо розглядати не прямий логічний висновок $H \Rightarrow C$, а твердження, протилежне до оберненого – $\neg C \Rightarrow \neg H$. Це доведення є окремим випадком доведення від супротивного. Розглянемо його суть.

Істинність твердження $H \Rightarrow C$ означає, що C є логічним висновком H. Припущення супротивного полягає в тому, що C **не** є логічним висновком H, тобто C є хибним за істинності H. Отже, припускають, що H є істинним, а C – хибним, тобто що істинним є твердження $H \wedge \neg C$. Далі з цього твердження намагаються як логічний висновок отримати суперечність F. Як правило, суперечність отримують у вигляді $P \wedge \neg P$, де P – деяке твердження. Інколи з $H \wedge \neg C$ виводять твердження $\neg P$, де P – уже відоме істинне твердження, зокрема H. Отримана суперечність доводить, що $H \wedge \neg C$ не може бути істинним, тобто істинним є $H \Rightarrow C$.

1.4.4. Проста індукція

Методи індукції застосовуються для доведення тверджень вигляду "для кожного натурального $n \geq n_0$ справджується $P(n)$", де $P(n)$ – деяке висловлення зі змінною n. У найпростішому випадку для доведення цього твердження достаньо довести два твердження. Перше – $P(n_0)$. Його називають базою індукції. Друге – $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, де $n \geq n_0$. (індукційний перехід). Для його доведення припускають, що $P(n)$ є істинним (припущення індукції). Використовуючи це припущення, доводять, що $P(n+1)$ теж є істинним, тобто є логічним висновком твердження $P(n)$. Звідси істинним є й твердження $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Отже, можна стверджувати, що $P(n_0)$ є істинним. Тоді за індукційним переходом та правилом відокремлення $P(n_0+1)$ також є істинним. Аналогічно встановлюється істинність $P(n_0+2)$, $P(n_0+3)$ тощо, звідки отримуємо істинність потрібного твердження.

Описану схему доведення називають простою індукцією. Повна індукція відрізняється від простої тим, що індукційний перехід має вигляд

$(\forall k\ ((n_0 \leq k \leq n) \to P(k)) \Rightarrow P(n+1)$. Ще одну схему індукції, трансфінітну індукцію, наведено в главі 6.

Приклад 1.9. Довести, що якщо $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \ldots\ P_{n-1} \Rightarrow P_n$, то $P_1 \Rightarrow\ P_n$ $(n \geq 2)$.

►Доведемо це твердження простою індукцією за n.

База індукції. Для $n = 2$ за умовою $P_1 \Rightarrow P_2$.

Крок індукції. Припустимо, що якщо $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \ldots\ P_{n-1} \Rightarrow P_n$, то $P_1 \Rightarrow\ P_n$. Доведемо, що якщо $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \ldots\ P_{n-1} \Rightarrow P_n \Rightarrow P_{n+1}$, то $P_1 \Rightarrow\ P_{n+1}$. За припущенням індукції $P_1 \Rightarrow P_n$. Отже, $P_1 \Rightarrow P_n \Rightarrow P_{n+1}$. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow\ (A \to C)$ і квантор загальності дистибутивний відносно кон′юнкції, тому $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\ \Rightarrow\ (A \Rightarrow C)$[9]. Отже, з $P_1 \Rightarrow P_n \Rightarrow P_{n+1}$ випливає $P_1 \Rightarrow\ P_{n+1}$.

Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено. ◄

1.4.5. Відповідь на питання ″Чи істинно, що …?″

Питання вигляду "Чи істинно, що $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?", де $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є твердженням стосовно об'єктів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, може мати відповідь "Так" чи "Ні". Відповідь "Так" означає, що за всіх можливих наборів значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ твердження $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є істинним. Іншими словами, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є тотожно-істинним твердженням. Отже, відповідь "Так" вимагає довести тотожну-істинність твердження $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Відповідь "Ні" означає, що існує хоча б один набір значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, за якого твердження $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є хибним, тобто досліджуване твердження не є тотожно-істинним (але може бути істинним для деяких конкретних наборів). У цій ситуації для вичерпного обґрунтування відповіді достатньо навести хоча б один набір значень, який спростовує твердження (***контрприклад***).

Задачі

1.1. Записати твердження (не обов'язково істинні) логіко-математичною символікою, розклавши їх на простіші складові:

а) Якщо 7 > 6, то 7 ≥ 6.

б) Неправильно, що хоч одне з чисел 21, 51, 91 є простим.

в) Число *n* кратне 77 тоді й тільки тоді, коли воно кратне 7 і кратне 11.

г) Число *n* кратне 77 тільки тоді, коли *n* кратне 7 і кратне 11.

д) Неправильно, що задане число не кратне 15 тоді й тільки тоді, коли воно не кратне 5 і не кратне 3.

е) Число *n* просте тільки тоді, коли воно непарне.

є) Число *n* кратне 18 тоді, коли воно кратне 9.

ж) Для того щоб число *n* було кратне 3, достатньо, щоб *n* було кратне 6.

з) Трикутник *ABC* рівносторонній тільки тоді, коли він рівнобедрений.

[9] Зокрема, для тверджень з однією змінною x
$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\forall x\ (A \to B) \wedge \forall x\ (B \to C)) \Leftrightarrow (\forall x\ ((A \to B) \wedge (B \to C)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x\ (A \to C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)$.

1.2. Записати твердження логіко-математичною символікою, розклавши їх на простіші складові:

а) Кожне раціональне число є дійсним числом.

б) Деяке дійсне число є раціональним числом.

в) Не кожне дійсне число є раціональним числом.

г) Жоден продавець старих авто не купує старе авто для себе.

д) Деякі люди, що купують старі авто, є людьми нечесними.

е) Жодний політикан не є чесним.

є) Кожен, хто має впертість, може вивчити логіку.

ж) Ви можете обманювати декого весь час, ви можете обманювати всіх деякий час, але ви не можете обманювати всіх весь час.

з) Немає коліс, які б підходили до всіх марок автомобілів.

и) Кожне колесо підходить до якоїсь марки автомобіля.

1.3. Записати твердження логіко-математичною символікою, використавши тільки твердження $P(x)$, логічні зв'язки та квантори:

а) Існує хоча б один предмет, що має властивість P.

б) Існує не більше одного предмета, що має властивість P.

в) Існує рівно один предмет, що має властивість P.

г) Існує не менш ніж два предмети, що мають властивість P.

д) Існує не більш ніж два предмети, що мають властивість P.

е) Існує рівно два предмети, що мають властивість P.

1.4. Записати твердження логіко-математичною символікою, розклавши їх на простіші складові:

а) Через будь-які три точки простору можна провести площину.

б) Для будь-якої прямої та двох точок по один бік її можна провести коло, що дотикається прямої і проходить через ці точки.

в) У деякі трапеції можна вписати коло.

г) Будь-яку рівнобедрену трапецію можна вписати в коло.

д) Через будь-які дві різні точки площини можна провести єдину пряму.

е) Будь-яка пряма, що лежить в одній площині з даною прямою, перетинає цю пряму.

є) З трьох різних точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

ж) Через три точки площини, що не лежать на одній прямій, можна провести єдину площину.

з) Якщо дві різні точки лежать на площині, то й пряма, що проходить через них, лежить на площині.

1.5. Довести співвідношення з підрозділів 1.2.3 та 1.3.2.

1.6. Скласти таблиці істинності для таких тверджень:

а) $A \to \neg(B \wedge C)$;

б) $(\neg A \vee B) \sim (A \wedge \neg C)$;

в) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (C \to A))$;

г) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

д) $(A \sim \neg B) \wedge ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$.

1.7. Шляхом еквівалентних перетворень довести, що $(A \vee B) \wedge (B \to A) \vee (A \wedge C) \Leftrightarrow A$.

ГЛАВА 2. Алгебра множин

2.1. Поняття множини

Поняття множини є одним з базових математичних понять; його не означають, а лише пояснюють на прикладах. Так, можна говорити про множину книг певної бібліотеки, множину всіх розв'язків заданого рівняння, числові множини тощо. Книги бібліотеки, розв'язки рівняння, числа є елементами відповідних множин.

Інтуїтивне поняття множини запропонував Г. Кантор: "Довільне зібрання певних предметів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від одного і які уявляються як єдине ціле, називається ***множиною***. Предмети, які входять до складу множини, називаються її ***елементами***." Таке розуміння множини не обмежує природу елементів, з яких складається множина, і дозволяє навіть розглядати множини, елементи яких неможливо точно визначити. Також множина може як складатися зі скінченної кількості елементів, так і бути нескінченною.

Відмітимо такі властивості множин:

1) усі елементи множини є **р і з н и м и** ;

2) кожен предмет або є, або не є елементом заданої множини.

Отже кожна множина однозначно визначається своїми елементами.

Те, що предмет x є елементом множини A, записують як $x\in A$ (читають: "x належить A"). Якщо x не є елементом множини A, то записують $x\notin A$ ("x не належить A").

Дві множини A і B називають ***рівними***, якщо їх складено одними й тими самими елементами; цей факт позначають $A = B$. Відповідно, якщо дві множини A і B не є рівними ($A \neq B$), то існує хоча б один елемент, який належить тільки одній з них (**в і д р і з н я є** їх).

$A=B \Leftrightarrow \forall x\ (x\in A\sim x\in B) \Leftrightarrow (x\in A\Leftrightarrow x\in B)$,

$A\neq B \Leftrightarrow \exists x\ (x\in B \wedge x\notin A) \vee \exists x\ (x\in A\ x\notin B)$.

Теорема 2.1 про транзитивність рівності множин. Рівність множин є транзитивною, тобто

$A=B \wedge B=C \Rightarrow A=C$.

► За умовою $A = B$, $B = C$. Припустимо, що $A \neq C$. Тоді існує x, який відрізняє множини A і C. Якщо $x\in A$, то $x\notin C$, але множини B і C рівні, тому $x\notin B$. Отже, x відрізняє A і B, рівні за умовою. Суперечність. Якщо $x\notin A$, то $x\in C$, і з $A = B$ маємо $x\notin B$. Звідси x відрізняє множини B і C, рівні за умовою. Суперечність. Отже, припущення $A \neq C$ хибне і $A = C$. ◄

Множину A називають ***скінченною***, якщо кількість її елементів можна задати натуральним числом[10]. Кількість елементів скінченної множини A позначатимемо $N(A)$.

[10] У школі вважають, що число 0 не є натуральним. Однак це породжує певні труднощі в багатьох розділах математики. Тому в сучасній науці, використовуючи переважно аксіоматичний підхід, під ***множиною***

Скінченну множину можна задати переліком її елементів. Записом $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ позначають множину, складену елементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Наприклад, множину $A_1 = \{1\}$ складено єдиним елементом 1, множину $A_2 = \{1, 2\}$ двома (1 і 2). Множини A_2, $A_3 = \{1, 2, 2\}$ і $A_4 = \{2, 1\}$ рівні між собою, оскільки складені елементами 1 і 2; кожна містить два елементи.

Множину розуміють як єдине ціле, тому слід відрізняти множину та її елементи. Так, множини A_1 та $A_5 = \{\{1\}\}$ є різними: елементом A_1 є 1, елементом A_5 – множина $\{1\}$.

На відміну від скінченних множин, нескінченні множини неможливо задати явним переліком елементів. Узагалі, щоб визначити множину, досить указати ***характеристичну властивість*** елементів – її мають усі елементи цієї множини, і тільки вони. Цю властивість задають твердженням про елементи: $\{x \mid P(x)\}$ позначає множину всіх елементів, які мають властивість P.[11] Наприклад, $\{x \mid x$ є натуральним числом$\}$ – множина натуральних чисел, $\{x \mid x$ є натуральним числом і не ділиться націло на 2$\}$ – множина натуральних непарних чисел. Якщо жоден елемент не задовольняє вказану властивість P, то множина $\{x \mid P(x)\}$ не має елементів, наприклад, $\{x \mid x \neq x\}$. Такі множини не можуть відрізнятися елементами, тому є рівними. Отже, існує лише одна така множина – її називають ***порожньою*** й позначають $\varnothing$. Має місце співвідношення $x\in\varnothing \Leftrightarrow \mathrm{F}$.

Примітка. Далі під твердженням вигляду $\forall x\in M\ P(x)$, де M – множина, розумітимемо твердження $\forall x\ (x\in M \rightarrow P(x))$, а під твердженням вигляду $\exists x\in M\ P(x)$ – твердження $\exists x\ (x\in M \wedge P(x))$. У разі непорожньої множини M, для вказаних виразів з кванторами справджуються співвідношення, аналогічні наведеним у підрозділі 1.3.2. Ось деякі з них:

$\forall x\in M_1\ \forall y\in M_2\ P(x,y) \Leftrightarrow \forall y\in M_2\ \forall x\in M_1\ P(x,y)$,

$\neg(\forall x\in M\ P(x)) \Leftrightarrow \exists x\in M\ \neg P(x)$,

$\neg(\exists x\in M\ P(x)) \Leftrightarrow \forall x\in M\ \neg P(x)$,

$\exists x\in M\ (P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x\in M\ P(x) \vee \exists x\in M\ Q(x)$.

2.2. Операції над множинами

Якщо кожен елемент множини A є й елементом множини B, то множину A називають ***підмножиною*** множини B, а B – ***надмножиною*** A. Це записують як $A\subseteq B$ або $B\supseteq A$. Інколи кажуть, що множина A ***включається*** в множину B. Якщо $A\subseteq B$ і множини A і B не рівні, то кажуть, що A ***строго включається*** в B, і позначають це як $A\subset B$. Порожня множина не містить жодного елемента, тому за означенням вона є підмножиною будь-якої

натуральних чисел вважають множину $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. $N_+ = \{n \mid n$ натуральне і $n \neq 0\} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ — це множина натуральних додатних чисел.

[11] Нагадаємо, що не кожне розповідне речення є твердженням про об'єкт (тобто задає властивість об'єкта), тому не кожна сформульована характеристика об'єктів задає множину.

множини. Також за означенням, підмножиною множини B є й вона сама. Будь-яку непорожню підмножину A множини B, відмінну від B, називають ***власною підмножиною*** B[12]. Якщо A не є підмножиною множини B, то будемо писати $A \not\subseteq B$. Отже,

$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A\rightarrow x\in B) \Leftrightarrow (x\in A\Rightarrow x\in B)$,

$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge A\neq B$,

$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x\in A \wedge x\notin B)$,

$\varnothing\subseteq A$,

$A\subseteq A$.

Теорема 2.2. $x\in A \wedge A\subseteq B \Rightarrow x\in B$.

► З означення включення кожен елемент множини A є елементом множини B. А тому й цей елемент x є елементом множини B. Звідси $x\in B$. ◄

Теорема 2.3 про транзитивність включення множин.

$A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$.

► $x\in A \xRightarrow{(A\subseteq B \text{ і теорема 2.2})}$[13] $x\in B \xRightarrow{(B\subseteq C \text{ і теорема 2.2})} x\in C$. ◄

Теорема 2.4. Критерій рівності множин. Для того, щоб множини A і B були рівними, необхідно й достатньо, щоб множина A була підмножиною множини B і множина B була підмножиною множини A.

► ($\Rightarrow$) Якщо $A=B$, то кожен елемент множини A є елементом множини B і, навпаки, кожен елемент множини B є елементом множини A, тобто кожна з множин A і B є підмножиною іншої.

($\Leftarrow$) Оскільки множина A є підмножиною множини B, то кожен елемент множини A належить множині B. Оскільки B є підмножиною A, то кожен елемент множини B належить A. Звідси множини A і B складаються з однакових елементів і є рівними. ◄

Попереднє твердження та його доведення запишемо формально.

Критерій рівності множин. $A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B) \wedge (B\subseteq A)$

► $A=B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A \sim x\in B) \Leftrightarrow \forall x\,((x\in A\rightarrow x\in B) \wedge (x\in B\rightarrow x\in A)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\,(x\in A\rightarrow x\in B) \wedge \forall x\,(x\in B\rightarrow x\in A) \Leftrightarrow (A\subseteq B) \wedge (B\subseteq A)$. ◄

Далі ми записуватимемо саме такі лаконічні тексти. Проте, переходячи в тексті від слів до математичних позначок, пам'ятаймо, що текст доведеться читати комусь іншому, тому не припускайтеся крайнощів.

[12] Існує кілька поглядів щодо того, чи може власна підмножина бути порожньою. Виходячи з [2, 9], вважаємо, що власна підмножина непорожня. Тоді власна підмножина є нетривіальною (відмінною від $\varnothing$ та всієї множини). Водночас, у [7] вважається, що $\varnothing$ може бути власною підмножиною, але при цьому поняття власної підмножини прив'язано до позначки $\subset$.

[13] У такий спосіб тут і далі ми будемо наводити додаткові обґрунтування та пояснення того чи іншого логічного переходу.

Об'єднанням множин A і B називають множину, складену з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з множин A і B; об'єднання A і B позначають $A\cup B$. Наприклад, $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$.

$A\cup B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}$,

$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B$.

Перетином множин A і B називають множину, складену з тих і тільки тих елементів, які належать кожній з множин A і B, перетин A і B позначають $A\cap B$. Наприклад, $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 5\} = \{2\}$.

$A\cap B = \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$,

$x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B$.

Якщо $A\cap B = \varnothing$, то кажуть, що множини A і B ***не перетинаються*** або що вони ***диз'юнктні***.

Різницею множин A і B називають множину, складену з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B; різницю A і B позначають $A\backslash B$. Наприклад, $\{1, 2, 3\} \backslash \{2, 5\} = \{1, 3\}$.

$A\backslash B = \{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$,

$x\in A\backslash B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \Leftrightarrow x\in A \wedge \neg x\in B$.

Симетричною різницею множин A і B називають множину, складену з тих і тільки тих елементів, які належать рівно одній з множин A і B; симетричну різницю множин A і B позначають $A\div B$ або $A\Delta B$. Наприклад, $\{1, 2, 3\} \div \{2, 5\} = \{1, 3, 5\}$.

$A\div B = \{x \mid (x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\notin A \wedge x\in B)\}$,

$x\in A\div B \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\notin A \wedge x\in B)$.

Зауваження. Для симетричної різниці можна дати інше, еквівалентне означення, а саме: $A\div B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

Означені вище операції над множинами називають теоретико-множинними операціями. Їх можна **н е ф о р м а л ь н о** проілюструвати за допомогою ***діаграм Венна*** (рис. 2.1), на яких множини схематично зображуються у вигляді областей площини, а результат теоретико-множинної операції є також деякою областю площини. Діаграми Венна слід сприймати тільки як спосіб ілюстрації і ніяк не спосіб доведення тих чи інших співвідношень між множинами.

Універсумом або ***універсальною множиною*** у тій чи іншій математичній теорії називають множину, елементами якої є всі об'єкти, що розглядаються в цій теорії. Як правило, універсум позначають U або E. Якщо зафіксовано універсум U й A є його підмножиною, то множина елементів множини U, які не належать A, називається ***доповненням*** множини A (до множини U) і позначається $\overline{A}$.

$\overline{A} = U\backslash A = \{x \mid x\in U \wedge x\notin A\}$ для універсуму U і $A\subseteq U$

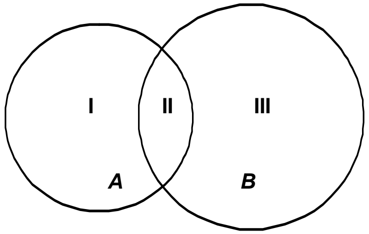

Рис. 2.1. Діаграми Венна. $A\backslash B$ – область I; $A\cap B$ – область II; $B\backslash A$ – область III; $A\cup B$ – області I,II і III; $A\div B$ – області I і III

2.3. Основні теоретико-множинні тотожності

Теоретико-множинні операції задовольняють певні закони; частину з них сформульовано в такій теоремі:

Теорема 2.5. Основні теоретико-множинні тотожності.

Зафіксуємо універсум U. Для довільних підмножин A, B, C множини U мають місце тотожності:

$A\cup B = B\cup A$, $A\cap B = B\cap A$,

$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$,

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup A = A$, $A\cap A = A$,

$A\cup(A\cap B) = A$, $A\cap(A\cup B) = A$,

$A\cup\varnothing = A$, $A\cap\varnothing = \varnothing$, $A\cup U = U$, $A\cap U = A$, $\overline{\varnothing} = U$, $\overline{U} = \varnothing$,

$\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$,

$\overline{\overline{A}} = A$,

$A\cup\overline{A} = U$, $A\cap\overline{A} = \varnothing$.

► Доведемо деякі з тотожностей, використовуючи наведені в підрозділі 1.2.3 логічні співвідношення.

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$, оскільки має місце такий ланцюжок еквівалентностей:

$x\in A\cup(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B\cap C \Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge (x\in A \vee x\in C) \Leftrightarrow (x\in A\cup B) \wedge (x\in A\cup C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

$\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$, оскільки має місце такий ланцюжок еквівалентностей:

$x\in\overline{A\cap B} \Leftrightarrow x\in U \wedge \neg(x\in A\cap B) \Leftrightarrow x\in U \wedge \neg(x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in U \wedge (x\notin A \vee x\notin B) \Leftrightarrow (x\in U \wedge x\notin A) \vee (x\in U \wedge x\notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A} \vee x\in\overline{B} \Leftrightarrow x\in\overline{A}\cup\overline{B}$.

$A\cap\overline{A} = \varnothing$, оскільки має місце такий ланцюжок еквівалентностей:

$x\in A\cap\overline{A} \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in\overline{A} \Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in U \wedge x\notin A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (x\notin A \wedge x\in U) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin A) \wedge x\in U \Leftrightarrow \mathrm{F} \wedge x\in U \Leftrightarrow \mathrm{F}$. ◄

Зауваження. Слід пам'ятати, що доповнення до множини A складається не просто з елементів, які множині A не належать, а з **е л е м е н т і в   у н і в е р с у м у**, які не належать множині A. Тому згадка про $x\in U$ в попередньому доведенні формально необхідна.

Зауваження. Якщо порівняти логічні співвідношення з підрозділу 1.2.3 та теоретико-множинні тотожності, то можна побачити певну аналогію, наприклад, закони де Моргана:

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ і $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$,

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ і $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$.

Неважко бачити, що логічне заперечення $\neg$ і теоретико-множинне доповнення $\overline{}$, кон'юнкція $\wedge$ і перетин $\cap$, диз'юнкція $\vee$ і об'єднання $\cup$ мають багато спільного у своїх властивостях.

Асоціативність операцій $\cap$ та $\cup$ дозволяє опускати дужки у виразах вигляду $A\cap B\cap C$, $A\cup B\cup C$ (також і з більшою кількістю операцій), оскільки незалежно від розстановки дужок такі вирази задають одну й ту саму множину.

Теоретико-множинні тотожності дозволяють проводити еквівалентні перетворення виразів з множинами та спрощувати їх аналогічно тому, як це робиться в елементарній алгебрі.

Приклад 2.1. Використовуючи основні теоретико-множинні тотожності, доведемо тотожність $(A\cap B) \cup (A\cap\overline{B}) \cup (\overline{A}\cap B) = A\cup B$.

► $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B) = (A\cap B)\cup(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B) =$

$= ((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}))\cup((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)) =$

$= ((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}))\cup((B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})) =$

$= (A\cap(B\cup\overline{A}))\cup(B\cap(A\cup\overline{A})) = (A\cap U)\cup(B\cap U) = A\cup B$. ◄

Зауваження. Досі в прикладах доведення теоретико-множинних тотожностей перетворення починалися з лівої частини. Проте від того, з якої частини почати, залежить лише прозорість перетворень. Загальних правил визначення напрямку перетворень немає. Як правило, але не завжди, краще перетворювати частину з більшою кількістю операцій. Якщо в деякий момент стає незрозумілим, що робити далі, то, можливо, варто спробувати перетворити іншу частину, а потім порівняти результати.

Наведемо приклади безпосереднього доведення теоретико-множинних тотожностей.

Приклад 2.2. $A\cup B = A\cup(B\backslash A)$.

► $x\in A\cup(B\backslash A) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B\backslash A \Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B \wedge x\notin A) \Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge$
$\wedge (x\in A \vee x\notin A) \Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B \Leftrightarrow x\in A\cup B$. ◄

Приклад 2.3. $A\cap(B\backslash A) = \varnothing$.

► $x\in A\cap(B\backslash A) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B\backslash A \Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in B \wedge x\notin A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in B \wedge (x\in A \wedge x\notin A) \Leftrightarrow x\in B \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$. ◄

Приклад 2.4. $(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash C)\backslash(B\backslash C)$.

► Твердження про неналежність елемента множині, позначеній виразом, як правило, записують у формі "неправда, що елемент належить". Це дозволяє уникнути помилок з неуважності в подальшому спрощенні.

$x\in(A\setminus C)\setminus(B\setminus C) \Leftrightarrow x\in(A\setminus C) \wedge \neg(x\in B\setminus C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin C) \wedge \neg(x\in B \wedge x\notin C)) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin C) \wedge (x\notin B \vee x\in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin C \wedge x\notin B) \vee (x\in A \wedge x\notin C \wedge x\in C) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin C \wedge x\notin B) \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \wedge x\notin C \Leftrightarrow x\in A\setminus B \wedge x\notin C \Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\setminus C$. ◄

Приклад 2.5. $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\setminus C$.

► $x\in A\setminus(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in B\cup C) \Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in B \vee x\in C)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (x\notin B \wedge x\notin C) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B) \wedge x\notin C \Leftrightarrow x\in A\setminus B \wedge x\notin C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\setminus C$. ◄

Приклад 2.6. $A\cap(B\div C) = (A\cap B)\div(A\cap C)$.

► $x\in(A\cap B)\div(A\cap C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A\cap B \wedge \neg(x\in A\cap C)) \vee (\neg(x\in A\cap B) \wedge x\in A\cap C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((x\in A \wedge x\in B) \wedge \neg(x\in A \wedge x\in C)) \vee (\neg(x\in A \wedge x\in B) \wedge (x\in A \wedge x\in C)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((x\in A \wedge x\in B) \wedge (x\notin A \vee x\notin C)) \vee ((x\notin A \vee x\notin B) \wedge (x\in A \wedge x\in C)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((x\in A \wedge x\in B \wedge x\notin A) \vee (x\in A \wedge x\in B \wedge x\notin C)) \vee$

$\vee ((x\notin A \wedge x\in A \wedge x\in C) \vee (x\notin B \wedge x\in A \wedge x\in C)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\mathrm{F} \vee (x\in A \wedge x\in B \wedge x\notin C)) \vee (\mathrm{F} \vee (x\notin B \wedge x\in A \wedge x\in C)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge (x\in B \wedge x\notin C)) \vee (x\in A \wedge (x\notin B \wedge x\in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge ((x\in B \wedge x\notin C) \vee (x\notin B \wedge x\in C)) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B\div C \Leftrightarrow x\in A\cap(B\div C)$. ◄

Приклад 2.7. $(A\div B)\cup(A\cap B) = A\cup B$

► $x\in(A\div B)\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\div B \vee x\in A\cap B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\notin A \wedge x\in B)) \vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\notin A \wedge x\in B) \vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\in A \wedge x\in B)) \vee ((x\notin A \wedge x\in B) \vee (x\in A \wedge x\in B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((x\in A \wedge (x\notin B \vee x\in B)) \vee ((x\notin A \vee x\in A) \wedge x\in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((x\in A \wedge \mathrm{T}) \vee (\mathrm{T} \wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B \Leftrightarrow x\in A\cup B$. ◄

Зауваження. Якщо обидві частини тотожності досить складні, то варто спробувати спростити кожну з них.

Приклад 2.8. Довести, що для довільних підмножин *A*, *B* універсуму *U* виконується $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = (A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$.[14]

► $x\in(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) \Leftrightarrow x\in A\cap B \vee x\in A\cap\overline{B} \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \vee$

$\vee (x\in A \wedge x\in\overline{B}) \Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in B \vee x\in\overline{B}) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in U \Leftrightarrow x\in A$.

$x\in(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B}) \Leftrightarrow x\in A\cup B \wedge x\in A\cup\overline{B} \Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge$

$\wedge (x\in A \vee x\in\overline{B}) \Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B \wedge x\in\overline{B}) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B\cap\overline{B} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A \vee x\in\varnothing \Leftrightarrow x\in A \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow x\in A$.

Тепер $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = A = (A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$, звідки за транзитивністю рівності маємо $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = (A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$. ◄

[14] Якщо *A* не є підмножиною універсуму, то до суперечності в умові задачі ми не приходимо, оскільки від *A* доповнення не береться, але шукана рівність не виконується.

Приклад 2.9. $A\cup(A\cap B) = A$.

► *Перший спосіб*. Скористаємося критерієм рівності множин і проведемо перетворення з обох боків.

$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \vee (x\in A \wedge x\in B) \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in A \vee x\in A \Leftrightarrow x\in A$.

$x\in A \Rightarrow x\in A \vee x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A\cup(A\cap B)$.

Другий спосіб. Розглянемо таке штучне перетворення

$x\in A \Leftrightarrow x\in A \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in B \vee x\notin B) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \vee (x\in A \wedge x\notin B)$.

Тоді

$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \vee (x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \vee (x\in A \wedge x\notin B) \Leftrightarrow x\in A$.

Третій спосіб. Скористаємось законом поглинання:

$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in A\cap B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A \vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow^{(\text{закони поглинання})} x\in A$. ◄

Крім теоретико-множинних тотожностей в теорії множин між множинами існують і інші співвідношення. Розглянемо кілька таких прикладів.

Приклад 2.10. Довести, що за довільних підмножин *A*, *B* універсуму *U* виконується $A\subseteq B \Leftrightarrow \overline{B}\subseteq\overline{A}$.

► ($\Rightarrow$) Оскільки $A\subseteq B \Leftrightarrow (x\in A\Rightarrow x\in B) \Leftrightarrow (x\notin B\Rightarrow x\notin A)$, то виконано $x\notin B \Rightarrow x\notin A$, а тоді $x\in\overline{B} \Leftrightarrow x\in U \wedge x\notin B \Rightarrow^{(x\notin B\Rightarrow x\notin A)} x\in U \wedge x\notin A \Leftrightarrow x\in\overline{A}$.

($\Leftarrow$) Нехай $\overline{B}\subseteq\overline{A}$, тоді за доведеним $\overline{\overline{A}}\subseteq\overline{\overline{B}}$. Ураховуючи тотожності $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\overline{B}} = B$, отримаємо, що $A\subseteq B$. ◄

Приклад 2.11. Довести, що $A\subseteq B^{(1)} \Leftrightarrow A\cup B = B^{(2)} \Leftrightarrow A\cap B = A^{(3)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A\setminus B = \varnothing^{(4)}$.

► (1) $\Rightarrow$ (2). $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B \Rightarrow^{(1)} x\in B \vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$. З іншого боку, $x\in B \Rightarrow x\in A \vee x\in B \Leftrightarrow x\in A\cup B$. За критерієм рівності множин, $A\cup B = B$.

(2) $\Rightarrow$ (3). $x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B \Leftrightarrow^{(2)} x\in A \wedge x\in A\cup B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in A \vee x\in B) \Leftrightarrow^{(\text{закони поглинання})} x\in A$.

(3) $\Rightarrow$ (4). $x\in A\setminus B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \Leftrightarrow^{(3)} (x\in A \wedge x\in B) \wedge x\notin B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in B \wedge x\notin B) \Leftrightarrow x\in A \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$.

(4) $\Rightarrow$ (1). $x\in A \Leftrightarrow x\in A \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in B \vee x\notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \vee (x\in A \wedge x\notin B) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \vee x\in A\setminus B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \vee x\in\varnothing \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B \Rightarrow x\in B$.

Отже, доведено, що (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1); тоді (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4). ◄

Приклад 2.12. Довести, що $A\cup B\subseteq C^{(1)} \Leftrightarrow A\subseteq C^{(2)} \wedge B\subseteq C^{(3)}$.

► ($\Rightarrow$) $x\in A \Rightarrow x\in A \vee x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow^{(1)} x\in C$, звідки $A\subseteq C$. Включення $B\subseteq C$ доводиться аналогічно.

($\Leftarrow$) $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B \Rightarrow^{(2,\,3)} x\in C \vee x\in C \Leftrightarrow x\in C$. ◄

2.4. Булеан множини

Булеаном множини A називають множину всіх підмножин множини A та позначають $P(A)$, або 2^A, або $B(A)$. Отже, $P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$. Наприклад, $P(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$, $P(\{1, 2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$. $P(\varnothing)$ – це **одноелементна** множина.

Приклад 2.13. Довести, що $A \subseteq B$ тоді й тільки тоді, коли $P(A) \subseteq P(B)$.

► ($\Rightarrow$) Доведемо, що з $A \subseteq B$ випливає $P(A) \subseteq P(B)$:

$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A \overset{(A \subseteq B)}{\Rightarrow} x \subseteq B \Leftrightarrow x \in P(B)$.

($\Leftarrow$) Доведемо обернене твердження: якщо $P(A) \subseteq P(B)$, то $A \subseteq B$:

$x \in A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \overset{(P(A) \subseteq P(B))}{\Rightarrow} \{x\} \in P(B) \Leftrightarrow x \in B$. ◄

2.5. Сім′ї множин та їх властивості

Нехай I – множина. Множину $\{A_i \mid A_i$ – множина й $i \in I\}$ називають ***сім′єю множин*** і позначають A_i ($i \in I$) або $\{A_i\}_{i \in I}$. Множину I називають ***множиною індексів*** сім′ї $\{A_i\}_{i \in I}$. Наприклад, сім′ями множин можна вважати множини $\{A_n\}_{n \in N}$, де $A_n = \{x \mid x \in R \wedge x \geq n\}$, $\{B_r\}_{r \in R}$, де $B_r = \{x \mid x \in R \wedge x \geq r\}$, та $\{\{a\}, \{b\}\}$. В останньому випадку можна вважати, що $I = \{1, 2\}$, $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$. Також сім′єю множин є булеан множини й взагалі довільна множина, елементами якої є множини (при цьому за необхідності можна вважати, що кожен елемент сім′ї проіндексований самим собою).

Для сімей множин означені *спеціальні* операції об'єднання й перетину.

Об'єднанням сім′ї множин $\{A_i\}_{i \in I}$ називають множину, складену з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з множин сім′ї. Його позначають $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ й інколи називають ***тілом сім′ї множин***.

За означенням, $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I\ (x \in A_i)\}$.

Перетином сім′ї множин $\{A_i\}_{i \in I}$, де $I \neq \varnothing$, називають множину, складену з тих і тільки тих елементів, які належать кожній з множин сім′ї; перетин позначають $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$.

За означенням, $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I\ (x \in A_i)\}$.

Якщо $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, то запис $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ позначатиме $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, а $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ – $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$.

Очевидно, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

Приклад 2.14. Довести тотожність $\bigcup\limits_{k \in K} \bigcup\limits_{i \in I} A_{ki} = \bigcup\limits_{i \in I} \bigcup\limits_{k \in K} A_{ki}$.

► $x \in \bigcup\limits_{k \in K} \bigcup\limits_{i \in I} A_{ki} \Leftrightarrow \exists k \in K\ x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_{ki} \Leftrightarrow \exists k \in K\ \exists i \in I\ x \in A_{ki} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\ i \in I\ \exists k \in K\ x \in A_{ki} \Leftrightarrow \exists i \in I\ x \in \bigcup\limits_{k \in K} A_{ki} \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{i \in I} \bigcup\limits_{k \in K} A_{ki}$. ◄

Приклад 2.15. Для $I \neq \varnothing$ довести тотожність $B \cup (\bigcap\limits_{i \in I} A_i) = \bigcap\limits_{i \in I} (B \cup A_i)$.

► $x \in B \cup (\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \in B \vee \forall i \in I\ x \in A_i \Leftrightarrow \forall i \in I\ (x \in B \vee x \in A_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall i \in I\ x \in B \cup A_i \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{i \in I} (B \cup A_i)$. ◄

Приклад 2.16. Для $I \neq \varnothing$ довести тотожність $\overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i} = \bigcap\limits_{i \in I} (\overline{A_i})$.

► $x \in \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i} \Leftrightarrow x \in U \wedge \neg(x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \in U \wedge \neg(\exists i \in I\ x \in A_i) \Leftrightarrow x \in U \wedge$

$\wedge (\forall i \in I\ x \notin A_i) \Leftrightarrow \forall i \in I\ (x \in U \wedge x \notin A_i) \Leftrightarrow \forall i \in I\ x \in \overline{A_i} \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{i \in I} (\overline{A_i})$. ◄

Приклад 2.17. Для $I \neq \varnothing$ довести, що $\bigcup\limits_{k \in K} \bigcap\limits_{i \in I} A_{ki} \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} \bigcup\limits_{k \in K} A_{ki}$ і знак включення $\subseteq$ не можна замінити на знак рівності.

► $x \in \bigcup\limits_{k \in K} \bigcap\limits_{i \in I} A_{ki} \Leftrightarrow \exists k \in K \bigcap\limits_{i \in I} A_{ki} \Leftrightarrow \exists k \in K\ \forall i \in I\ x \in A_{ki} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i \in I\ \exists k \in K\ x \in A_{ki} \Leftrightarrow \forall i \in I\ x \in \bigcup\limits_{k \in K} A_{ki} \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{i \in I} \bigcup\limits_{k \in K} A_{ki}$.

Щоб довести, що знак включення $\subseteq$ не можна замінити на знак рівності, достатньо навести приклад множин A_{ki} ($k \in K$, $i \in I$), для яких має місце строге включення. В доведенні лише один раз було здійснено перехід не за еквівалентністю, а за логічним висновком, тому для побудови прикладу проаналізуємо, чому не можна замінити логічний висновок на еквівалентність. Дійсно, коли істинне твердження $\exists k \in K\ \forall i \in I\ x \in A_{ki}$, то всім значенням параметра i задовольняє одне й те саме значення параметра k. Якщо істинне твердження $\forall i \in I\ \exists k \in K\ x \in A_{ki}$, то тут різним значенням параметрам i можуть задовольняти різні значення параметра k. На основі цієї інформації будуємо приклад $K = I = \{1, 2\}$, $A_{11} = \{1\}$, $A_{12} = \{2\}$, $A_{21} = \{2\}$, $A_{22} = \{1\}$, на якому досягається строге включення. ◄

Приклад 2.18. Довести, що $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ є найменшою (за включенням) множиною, яка включає всі множини A_i, $i \in I$.

► По-перше, доведемо , що множина $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ включає всі множини A_i, $i \in I$. Дійсно, при довільному $i \in I$ маємо $x \in A_i \Rightarrow \exists i \in I\ x \in A_i \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Тепер доведемо, що кожна множина A, яка включає всі множини A_i, $i \in I$, необхідно включає й $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$:

$x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I\ x \in A_i \Rightarrow \exists i \in I\ x \in A \Leftrightarrow x \in A$.

Останнім ми довели найменшість. ◄

Сім′я множин $\{A_i\}_{i\in I}$ називається ***покриттям*** множини A, якщо $A\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ [15]. Сім′я множин $\{A_i\}_{i\in I}$ називається ***розбиттям*** множини A, якщо $A=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ і множини A_i попарно не перетинаються ($A_i\cap A_j=\varnothing$ при $i\neq j$) (тобто є диз'юнктними). При цьому множини A_i називаються ***класами розбиття***. Відповідно до означень, кожне розбиття множини A є її покриттям, але не навпаки, оскільки різні елементи покриття можуть перетинатись, а різні елементи розбиття – ні.

Нехай є два покриття $\{A_i\}_{i\in I}$ і $\{B_j\}_{j\in J}$ множини A. Якщо кожний клас першого покриття включається в деякий клас другого, тобто $\forall i\in I\ \exists j\in J\ A_i\subseteq B_j$, то кажуть, що покриття $\{A_i\}_{i\in I}$ ***вписане в*** покриття $\{B_j\}_{j\in J}$. Якщо розбиття $\{A_i\}_{i\in I}$ множини A ***вписане в*** розбиття $\{B_j\}_{j\in J}$ множини A, то кажуть, що $\{A_i\}_{i\in I}$ є ***підрозбиттям*** розбиття $\{B_j\}_{j\in J}$. Інакше кажучи, підрозбиття є результатом подрібнення класів розбиття.

Наприклад, нехай $A=\{1, 2, 3, 4\}$. $\{\{1\}\}$ не є покриттям множини A; $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1\}\}$ є покриттям, але не розбиттям множини A; $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$, $\{\{1\}, \{3\}, \{2, 4\}\}$ є і покриттями, і розбиттями множини A, причому друге є підрозбиттям першого.

Теорема 2.6 про покриття та розбиття. За довільного покриття $\{A_n\}_{n\in N}$ множини A існує розбиття $\{B_n\}_{n\in N}$ множини A, при якому $B_n\subseteq A_n$ за всіх $n\in N$.

► Без обмеження загальності можемо вважати, що об'єднання всіх елементів покриття збігається з множиною A, тобто $A=\bigcup\limits_{n\in N}A_n$, оскільки в протилежному випадку кожну множину A_n сім′ї замінимо множиною $A_n\cap A$ і отримаємо покриття множини A, що відповідає вказаній властивості. Покладемо $B_0=A_0$, $B_n=A_n\setminus(\bigcup\limits_{i=0}^{n-1}A_i)$ для $n\geq 1$. За побудовою для всіх $n\in N$ виконується $B_n\subseteq A_n$.

Спочатку доведемо, що для всіх $n\in N$ має місце $\bigcup\limits_{i=0}^{n}A_i=\bigcup\limits_{i=0}^{n}B_i$.

$x\in\bigcup\limits_{i=0}^{n}A_i\Leftrightarrow^{\text{(серед усіх індексів } i \text{ для яких } x\in A_i \text{ можемо вибрати найменший)}}\exists i\ (0\leq i\leq n\ \wedge$

$\wedge\ x\in A_i\wedge\forall j<i\ x\notin A_j)\Leftrightarrow\exists i\ (0\leq i\leq n\wedge x\in A_i\wedge x\notin\bigcup\limits_{j=0}^{i-1}A_j)\Leftrightarrow$

[15] В літературі можна зустріти й дещо інше означення, а саме: сім′я множин $\{A_i\}_{i\in I}$ називається ***покриттям*** множини A, якщо $A=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$. У цьому контексті множина A розглядається як універсум.

$\Leftrightarrow\exists i\ (0\leq i\leq n\wedge x\in A_i\setminus(\bigcup\limits_{j=0}^{i-1}A_j))\Leftrightarrow\exists i\ (0\leq i\leq n\wedge x\in B_i)\Leftrightarrow x\in\bigcup\limits_{i=0}^{n}B_i$.

Доведемо, що сім′я множин $\{B_n\}_{n\in N}$ є покриттям множини A.

$x\in A\Leftrightarrow x\in\bigcup\limits_{n\in N}A_n\Leftrightarrow\exists n\in N\ x\in A_n\Leftrightarrow\exists n\in N\ x\in\bigcup\limits_{i=0}^{n}A_i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\exists n\in N\ x\in\bigcup\limits_{i=0}^{n}B_i\Leftrightarrow\exists n\in N\ x\in B_n\Leftrightarrow x\in\bigcup\limits_{n\in N}B_n$.

Доведемо, що множини сім′ї $\{B_n\}_{n\in N}$ попарно не перетинаються. За раніше доведеним $B_n=A_n\setminus(\bigcup\limits_{i=0}^{n-1}A_i)=A_n\setminus(\bigcup\limits_{i=0}^{n-1}B_i)$ для $n\geq 1$. Нехай $0\leq i<j$ ($i, j\in N$). Розглянемо перетин

$B_i\cap B_j=B_i\cap(A_j\setminus(\bigcup\limits_{t=0}^{j-1}B_t))=B_i\cap(A_j\setminus(B_i\cup(\bigcup\limits_{t=0}^{i-1}B_t\cup\bigcup\limits_{t=i+1}^{j-1}B_t)))=\varnothing$,

оскільки для довільних множин C, D і G виконано $C\cap(D\setminus(C\cup G))=\varnothing$. Отже, $\{B_n\}_{n\in N}$ є розбиттям множини A. ◄

Для нескінченної послідовності множин A_0, A_1, A_2, … можна ввести поняття ***верхньої*** та ***нижньої границі***, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ та $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ відповідно; їх визначають рівності:

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n\in N}(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k)$,

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n\in N}(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k)$.

Неважко бачити, що елемент x належить $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ тоді й тільки тоді, коли існує нескінченно багато множин послідовності, що містять елемент x, і належить $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ тоді й тільки тоді, коли він належить множинам A_n послідовності для майже всіх натуральних значень n, тобто для всіх окрім скінченної кількості. Відповідно до цього очевидним є співвідношення:

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subseteq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$

Доведемо, що $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subseteq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$, виходячи безпосередньо з означень. Дійсно,

$x\in\bigcup\limits_{n\in N}(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k)\Leftrightarrow\exists n\ \forall k\geq n\ x\in A_k\Rightarrow\exists n\ \forall k\ x\in A_{max\{k,n\}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists n\ \forall k\ x\in\bigcup\limits_{l=k}^{\infty}A_l\Leftrightarrow\forall k\ x\in\bigcup\limits_{l=k}^{\infty}A_l\Leftrightarrow x\in\bigcap\limits_{k\in N}(\bigcup\limits_{l=k}^{\infty}A_l)=\bigcap\limits_{n\in N}(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k)$.

Якщо виконується рівність $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, тобто верхня та нижня границі збігаються, то їх спільне значення позначають $\lim_{n\to\infty} A_n$ і називають ***границею*** послідовності A_0, A_1, A_2, … , а саму послідовність називають ***збіжною***. Не кожна послідовність множин є збіжною (див. задачу 2.34), але монотонні за включенням послідовності збіжні (див. задачу 2.36).

Задачі

2.1. Серед множин $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, b, c\}$, $C = \{a, \{b\}, c\}$, $D = \{a, c, b\}$, $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ визначити всі пари рівних. Визначити кількість елементів кожної множини.

2.2. Визначити кількість елементів кожної з множин $A = \varnothing$, $B = \{\varnothing\}$, $C = \{\{\varnothing\}\}$.

2.3. Які з наведених співвідношень є правильними:

а) $a\in\{a\}$;
б) $a\in\{\{a\}\}$;
в) $a\in\{a, b, c\}$;
г) $a\in\{\{a, b, c\}\}$;
д) $a\in\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;
е) $\{a\}\in\{a, b, c\}$;
є) $\{a\}\in\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;
ж) $\{a,b\}\in\{a, b, c\}$;
з) $\{a,b\}\in\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;
и) $\{a,b\}\in\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$?

2.4. Які з наведених співвідношень є правильними:

а) $0\in\varnothing$;
б) $\varnothing\in\varnothing$;
в) $\varnothing\in\{\varnothing\}$;
г) $\varnothing\in\{\{\varnothing\}\}$?

2.5. Які з наведених співвідношень є правильними:

а) $\varnothing\subseteq\varnothing$;
б) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$;
в) $\{\varnothing\}\subseteq\varnothing$;
г) $\{\varnothing\}\subseteq\{\{\varnothing\}\}$;
д) $\varnothing\subseteq\{a\}$;
е) $\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing\}$?

2.6. Довести, що якщо $A\subseteq\varnothing$, то $A = \varnothing$.

2.7. Довести, що якщо $A\subseteq B\subseteq C\subseteq A$, то $A = B = C$.

2.8. Довести, що якщо $A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_n\subseteq A_1$, то $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$.

2.9. Довести, що $A = B$ тоді й тільки тоді, коли $P(A) = P(B)$.

2.10*. Для кожного натурального числа n, $n \geq 1$, визначити множину A_n з n елементів таку, що якщо $x, y\in A_n$, то або $x\in y$, або $y\in x$, або $x = y$.

2.11. Довести, що:

а) $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$;
б) $A\backslash B\subseteq A$;
в) $A\subseteq B \Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$;
г) $A\subseteq B \Rightarrow A\cap C\subseteq B\cap C$;
д) $A\subseteq B \Rightarrow A\backslash C\subseteq B\backslash C$;
е) $A\subseteq B \Rightarrow C\backslash B\subseteq C\backslash A$.

2.12. Довести тотожності з теореми 2.5.

2.13. Довести теоретико-множинні тотожності.

а) $A\cap(B\backslash C) = (A\cap B)\backslash C$;
б) $(A\cup B)\backslash C = (A\backslash C)\cup(B\backslash C)$;
в) $A\backslash(A\backslash B) = A\cap B$;
г) $A\backslash(A\cap B) = A\backslash B$;
д) $A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B)\cap(A\backslash C)$;
е) $A\backslash(B\cap C) = (A\backslash B)\cup(A\backslash C)$;
є) $(A\cap B)\backslash C = (A\cap B)\backslash(A\cap C)$;
ж) $(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash B)\cap(A\backslash C)$;
з) $A\cap(\overline{A}\cup B) = A\cap B$, якщо A і B підмножини універсуму U;
и) $\overline{A\cap B} = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$, якщо A і B – підмножини універсуму U.

2.14. Довести теоретико-множинні тотожності:

а) $A\div B = B\div A$;
б) $(A\div B)\div C = A\div(B\div C)$;
в) $A\div(A\div B) = B$;
г) $(A\div B)\div(A\cap B) = A\cup B$;
д) $(A\div B)\div(A\cup B) = A\cap B$;
е) $A\backslash(A\div B) = A\cap B$;
є) $A\div(A\cap B) = A\backslash B$;
ж) $(A\div B)\cap A = A\backslash B$;
з) $A\div\varnothing = A$;
и) $A\div A = \varnothing$;
і) $A\div B = \overline{A}\div\overline{B}$, якщо A і B підмножини універсуму U.

2.15. Довести теоретико-множинні тотожності:

а) $(A\div B)\cup(A\cap B) = (A\div B)\div(A\cap B)$;
б) $(A\div B)\div(A\cup B) = A\backslash(A\div B)$;
в) $A\div(A\cap B) = (A\div B)\cap A$.

2.16. З використанням тотожностей з теореми 2.5, шляхом рівносильних перетворень довести тотожність

$(A\cap B)\cup(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C\cap D) = A\cap B$.

2.17. Довести, що для довільних підмножин A, B універсуму U виконується

$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap\overline{B} = \varnothing$.

2.18. Довести, що для довільних підмножин A, B, C універсуму U мають місце такі співвідношення:

а) $A\subseteq B\cap C \Leftrightarrow A\subseteq B$ і $A\subseteq C$;
б) $A\cap B\subseteq C \Leftrightarrow A\subseteq\overline{B}\cup C$;
в) $A\subseteq B\cup C \Leftrightarrow A\cap\overline{B}\subseteq C$;
г) $(A\backslash B)\cup B = A \Leftrightarrow B\subseteq A$;
д) $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C) \Leftrightarrow C\subseteq A$;
е) $A\cup B = A\cap B \Leftrightarrow A=B$;
є) $A\div B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$;
ж) $A\backslash C\subseteq B \Leftrightarrow A\cap\overline{B}\subseteq C$;
з) $C\backslash A\subseteq B \Leftrightarrow C\subseteq A\cup B$.

2.19*. Довести, що множина $A_1\div A_2\div\ldots\div A_n$ містить ті й тільки ті елементи, які належать непарній кількості множин A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2.20. Довести, що $P(A\cap B) = P(A)\cap P(B)$.

2.21. Довести, що $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$. Навести приклад множин A і B, для яких має місце строге включення.

2.22. Довести, що $P(A\backslash B)\subseteq P(A)\backslash P(B)$.

2.23. Довести, що $P(A\cup B) = \{x\cup y \mid x\in P(B) \wedge y\in P(B)\}$.

2.24. Виразити операції $\cup$, $\cap$ і \ через операції:

а) $\div$ та $\cap$;
б) $\div$ та $\cup$;
в) $\div$ та \ .

2.25*. Довести, що не можна виразити операцію:

а) \ через $\cap$ і $\cup$;
б) $\cup$ через $\cap$ і \.

2.26*. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} A\cap X = B, \\ A\cup X = C, \end{cases}$

де A, B і C – задані множини і $B\subseteq A\subseteq C$.

2.27*. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} A\setminus X = B, \\ A\cup X = C, \end{cases}$

де A, B і C – задані множини і $B\subseteq A\subseteq C$.

2.28*. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} A\setminus X = B, \\ X\setminus A = C, \end{cases}$

де A, B і C – задані множини і $B\subseteq A$ і $A\cap C = \varnothing$.

2.29. Для $I \neq \varnothing$ довести тотожності:

а) $\bigcap\limits_{k\in K}\bigcap\limits_{i\in I} A_{ki}=\bigcap\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{k\in K} A_{ki}$;

б) $B\cap(\bigcup\limits_{i\in I} A_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(B\cap A_i)$;

в) $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$.

2.30. Для $I \neq \varnothing$ довести, що:

а) $(\bigcup\limits_{i\in I} A_i)\div(\bigcup\limits_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} (A_i \div B_i)$;

б) $(\bigcap\limits_{i\in I} A_i)\div(\bigcap\limits_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} (A_i \div B_i)$;

в) у пунктах а) і б) знак включення не можна замінити знаком рівності.

2.31. Для $I \neq \varnothing$ довести справедливість таких тверджень:

а) якщо $A_i\subseteq B$ для всіх $i\in I$, то $\bigcup\limits_{i\in I} A_i\subseteq B$;

б) якщо $B\subseteq A_i$ для всіх $i\in I$, то $B\subseteq\bigcap\limits_{i\in I} A_i$;

в) якщо $A_i\subseteq B_i$ для всіх $i\in I$, то $\bigcup\limits_{i\in I} A_i\subseteq\bigcup\limits_{i\in I} B_i$ і $\bigcap\limits_{i\in I} A_i\subseteq\bigcap\limits_{i\in I} B_i$.

2.32. Для $I \neq \varnothing$ довести, що $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ є найбільшою (за включенням) множиною, яка включається в усі множини A_i, $i\in I$.

2.33*. Довести, що перетин довільної непорожньої сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in I}$ можна виразити за допомогою операцій різниці множин та об'єднання сімей.

2.34*. Побудувати приклад послідовності множин $(A_n)_{n\in N}$ такої, що $\bigcap\limits_{n\in N} A_n \subset \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup\limits_{n\in N} A_n$.

2.35. Довести, що $\bigcap\limits_{n\in N} A_n \subseteq \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq \bigcup\limits_{n\in N} A_n$.

2.36. Довести, що:

а) якщо $A_0\subseteq A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots$, то $\bigcup\limits_{n\in N} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$;

б) якщо $A_0\supseteq A_1\supseteq A_2\supseteq\ldots$, то $\bigcap\limits_{n\in N} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

ГЛАВА 3. Відповідності

3.1. Декартів добуток множин

3.1.1. Поняття декартового добутку

Прямий добуток множин – це одна з основних теоретико-множинних конструкцій. Його було введено Р. Декартом при побудові аналітичної геометрії, тому прямий добуток часто називають декартовим.

Спочатку розглянемо поняття ***пари***. Вважатимемо його первинним, хоча в сучасній математиці його означають як множину певного роду. Для нас важливо, що пара (a, b) має **першу** компоненту a та **другу** b, і, якщо ці компоненти різні, то обмін їх місцями утворює **іншу пару** (b, a).

Декартовим (***прямим***) ***добутком множин*** A і B називається множина $\{(a, b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$ усіх пар (a, b), в яких $a\in A$ і $b\in B$. Декартів добуток множин A і B позначається $A\times B$. Наприклад $\{a, b\}\times\{0, 1\} = \{(a, 0), (b, 0), (a, 1), (b, 1)\}$.

Поняття декартового добутку можна поширити на довільну скінченну сукупність множин. Декартів добуток множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 2$, $n\in N$) позначають $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ і означають як множину

$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1\in A_1 \wedge a_2\in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n\in A_n\}$.

При $n = 1$ за означенням вважають, що декартів добуток сукупності множин A_1 дорівнює множині A_1. Якщо хоча б одна з множин A_i, $i\in\overline{1,n}$,[16] порожня, то з означення випливає, що $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \varnothing$.

В означенні декартового добутку множини A_i, $i\in\overline{1,n}$, не обов'язково різні. Якщо всі вони однакові, тобто $A_i = A$ за всіх $i\in\overline{1,n}$, то декартів добуток $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ позначають A^n і називають n-м ***декартовим степенем множини*** A. Наприклад, множина R^2 усіх точок дійсної площині – це другий декартів степінь множини R всіх дійсних чисел (дійсної прямої). За означенням вважається, що множина A^0 складається з єдиного елемента – порожньої послідовності ().

Декартів добуток множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n\in N_+$) можна ототожнити з множиною всіх послідовностей вигляду $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, в яких $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2, \ldots, a_n\in A_n$. Послідовності $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ часто називають ***кортежами***, ***векторами*** або ***впорядкованими наборами*** довжини n. Кількість координат кортежу називається його ***довжиною***, або ***розмірністю***. Два кортежі однакової довжини $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ називаються ***рівними***, коли вони покоординатно рівні, тобто $a_i = b_i$ для всіх $i\in\overline{1,n}$. Кортежі різної довжини вважаються нерівними.

[16] Під записом $\overline{m,n}$, де m, $n\in N$, будемо розуміти відрізок натурального ряда від m до n включно, тобто множину $\{x \mid x\in N \wedge m \leq x \leq n\}$.

Елемент a_i, який стоїть на i-му місці кортежу $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, називають i-ю ***координатою***, або i-ю ***компонентою***, або ***проекцією*** кортежу a на i-у вісь чи просто i-ю проекцією кортежу a, та позначають $\mathrm{Pr}_i(a)$[17]. Наприклад, $\mathrm{Pr}_2(a, b, c, d) = b$. Проекцією кортежу $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на осі $i_1, i_2, \ldots, i_k$ називають кортеж $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})=(\mathrm{Pr}_{i_1}(a), \mathrm{Pr}_{i_2}(a), \ldots, \mathrm{Pr}_{i_k}(a))$ та позначають $\mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}(a)$. Ці операції проектування можна поширити на множини таким чином. Нехай M – множина кортежів однакової довжини. Проекцією множини M на i-ту вісь будемо називати множину проекцій на i-ту вісь усіх елементів множини M і позначати $\mathrm{Pr}_i(M)$; за означенням $\mathrm{Pr}_i(M)=\{\mathrm{Pr}_i(x) \mid x\in M\}$. Проекцією множини M на осі $i_1, i_2, \ldots, i_k$ називають множину $\mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}(M) = \{\mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}(x) \mid x\in M\}$. З означень випливає, що

$\mathrm{Pr}_1(A\times B) = A$;

$\mathrm{Pr}_2(A\times B) = B$;

$\mathrm{Pr}_i(A_1\times A_2\times\ldots\times A_n) = A_i$, $i\in \overline{1,n}$;

$\mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}(A_1\times A_2\times\ldots\times A_n) = (A_{i_1}\times A_{i_2}\times\ldots\times A_{i_k})$.

3.1.2. Властивості операції декартового добутку множин

По-перше, **декартів добуток не є комутативним**, тобто в загальному випадку $A\times B \neq B\times A$. Як контрприклад розглянемо множини $A = \{1\}$ і $B = \{2\}$, для яких $A\times B = \{(1, 2)\} \neq \{(2, 1)\} = B\times A$, оскільки кортежі (1, 2) і (2, 1) не рівні.

По-друге, **декартів добуток не є асоціативним**[18], тобто в загальному випадку $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$. Наприклад, за множин $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$ маємо $(A\times B)\times C = \{((1, 2), 3)\} \neq \{(1, (2, 3))\} = = A\times(B\times C)$, оскільки кортежі ((1, 2), 3) і (1, (2, 3)) не рівні: вони різняться принаймні першими координатами $(1, 2) \neq 1$.

Доведемо кілька тверджень про множини кортежів. Спочатку зауважимо, що, якщо множини D_1 і D_2 складено з кортежів довжини 2, то для них

$D_1 = D_2 \Leftrightarrow ((x, y)\in D_1 \Leftrightarrow (x, y)\in D_2)$,

$D_1\subseteq D_2 \Leftrightarrow ((x, y)\in D_1 \Rightarrow (x, y)\in D_2)$.

Наведені співвідношення дозволяють спрощувати запис доведень (див. нижче). Їх можна також узагальнити для множин кортежів довжини n, де $n\in N_+$.

[17] Якщо це не створює плутанини, то дужки можна опускати, наприклад, $\mathrm{Pr}_i\, a$.

[18] За цим положенням в літературі існують деякі розбіжності. Якщо елементами декартового добутку вважаються послідовності, а операція декартового добутку над множинами послідовностей зводиться до операції дописування однієї послідовності в кінець іншої, то вона стає асоціативною. При такому підході ми можемо втратити знання про структуру елементів, а сама операція декартового добутку фактично стає конкатенацією.

Теорема 3.1 про дистрибутивність декартового добутку. Декартів добуток є дистрибутивним відносно операцій об'єднання, перетину та різниці:

1) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$; 2) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$;

3) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$; 4) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$;

5) $A\times(B\backslash C) = (A\times B)\backslash(A\times C)$; 6) $(A\backslash B)\times C = (A\times C)\backslash(B\times C)$.

► 1) $(x, y)\in A\times(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup C \Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \vee y\in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \vee (x\in A \wedge y\in C) \Leftrightarrow (x, y)\in A\times B \vee (x, y)\in A\times C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$.

3) $(x, y)\in A\times(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cap C \Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \cap y\in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in A \wedge y\in C) \Leftrightarrow (x, y)\in A\times B \wedge (x, y)\in A\times C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$.

5) Зверніть особливу увагу на те, що $(x, y)\notin A\times C \Leftrightarrow x\notin A \vee y\notin C$ і ніяк інакше.

$(x, y)\in(A\times B)\backslash(A\times C) \Leftrightarrow (x, y)\in A\times B \wedge \neg((x, y)\in A\times C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge \neg(x\in A \wedge y\in C) \Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\notin A \vee y\notin C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B \wedge x\notin A) \vee (x\in A \wedge y\in B \wedge y\notin C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{F} \vee (x\in A \wedge y\in B \wedge y\notin C) \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge y\notin C \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\backslash C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y)\in A\times(B\backslash C)$. ◄

Твердження 3.1. Для непорожніх множин A, B, C і D

$A\subseteq B$ і $C\subseteq D \Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times D$.

► $(\Rightarrow)$ $(x, y)\in A\times C \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in C \Rightarrow^{(A\subseteq B \text{ і } C\subseteq D)} x\in B \wedge y\in D \Leftrightarrow (x, y)\in B\times D$, тому $A\times C\subseteq B\times D$. Для доведення твердження в цьому напрямку непорожність множин A, B, C і D несуттєва.

$(\Leftarrow)$ Доведемо, що $A\subseteq B$. За умовою множина C непорожня, тому існує деякий елемент $c\in C$. Тоді

$x\in A \Rightarrow x\in A \wedge c\in C \Leftrightarrow (x, c)\in A\times C \Rightarrow^{(A\times C\subseteq B\times D)} \Rightarrow (x, c)\in B\times D \Rightarrow x\in B$.

Отже, $A\subseteq B$. Аналогічно доводиться, що $C\subseteq D$. Зауважимо, що для доведення суттєво, що множини A і C непорожні: якщо $A = \varnothing$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, $D = \{d\}$, то $A\times C = \varnothing\subseteq B\times D$, але $C\not\subseteq D$; якщо $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \varnothing$, $D = \{d\}$, то $A\times C = \varnothing\subseteq B\times D$, але $A\not\subseteq B$. ◄

Твердження 3.2. Для непорожніх множин A, B, C і D

$A=B$ і $C=D \Leftrightarrow A\times C=B\times D$.

► За твердженням 3.1 маємо

$A\subseteq B \wedge C\subseteq D \Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times D$,

$B\subseteq A \wedge D\subseteq C \Leftrightarrow B\times D\subseteq A\times C$.

Тоді

$A=B \wedge C=D \Leftrightarrow (A\subseteq B \wedge B\subseteq A) \wedge (C\subseteq D \wedge D\subseteq C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A\subseteq B \wedge C\subseteq D) \wedge (B\subseteq A \wedge D\subseteq C) \Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times D \wedge B\times D\subseteq A\times C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A\times C=B\times D$. ◄

3.2. Відповідності

3.2.1. Основні означення

Довільну підмножину C декартового добутку множин A і B, $C\subseteq A\times B$, називають ***відповідністю між множинами*** A і B. Так, для множин $A = \{0, 1\}$ і $B = \{a, b\}$ кожна з множин пар $\{(0, a), (1, b)\}$, $\{(0, a), (0, b)\}$, $\{(0, a), (1, a)\}$, $\{(0, a)\}$, $\varnothing$ є відповідністю між множинами A і B.

Відповідності є множинами, тому їх можна задавати як множини. Для ілюстрації (та інколи неформального задання), як правило, невеликих скінченних відповідностей також використовують ***графік відповідності*** та ***діаграму відповідності***.

Нехай $C\subseteq A\times B$ – деяка відповідність між скінченними множинами $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ і $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Проведемо вертикальні лінії й позначимо їх елементами множини A, потім проведемо горизонтальні лінії й позначимо їх елементами множини B. Вузол на перетині прямих, що відповідають елементам a_i та b_j, виділимо тоді й тільки тоді, коли пара (a_i, b_j) належить відповідності C. Виділені вузли утворюють графік відповідності. На рис. 3.1 наведено графік відповідності $C = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, c)\}$ між множинами $A = \{1, 2, 3\}$ і $B = \{a, b, c\}$.

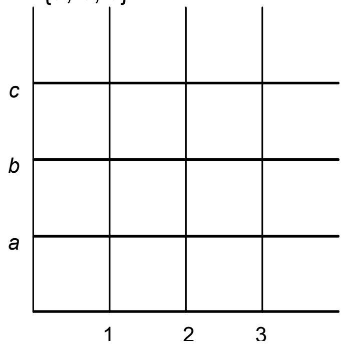

Рис. 3.1. Графік відповідності

Аналогічно вищенаведеному, усім відомий графік функції дійсного аргументу, наприклад, $y=x^2$, можна інтерпретувати як графік відповідності $\{(x, x^2) \mid x\in R\}$. Останній запис фактично задає відповідність (вона є множиною) за допомогою характеристичної властивості.

Для побудови діаграми відповідності намалюємо дві колонки точок. Точки першої колонки позначимо елементами множини A, другої – елементами множини B. З точки a_i проведемо стрілку в точку b_j другої колонки тоді й тільки тоді, коли пара (a_i, b_j) належить відповідності C. На рис. 3.2 наведено діаграму відповідності з рис. 3.1.

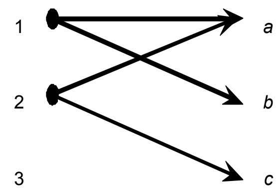

Рис. 3.2. Діаграма відповідності

Серед відповідностей між A і A окремо можна виділити відповідність $i_A = \{(a, a) \mid a\in A\}$, яку називають ***тотожним перетворенням (тотожною підстановкою)*** A, ***діагональною відповідністю*** або ***діагоналлю*** A.

Нехай $C\subseteq A\times B$ – деяка відповідність між множинами A і B. Множину $\Pr_1(C)$, рівну $\{x \mid \exists y\in B\ (x, y)\in C\}$, називають ***областю визначення***, а множину $\Pr_2(C)$, рівну $\{y \mid \exists x\in A\ (x, y)\in C\}$, – ***областю значень*** відповідності C. Область визначення відповідності C інколи позначають $\mathrm{Dom}\ C$ або δ_C, область значень – ρ_C.

Якщо $(a, b)\in C$, то елемент b ***відповідає*** елементу a при відповідності C. ***Образом***, або ***повним образом***, елемента a при відповідності C називається множина всіх елементів, які відповідають елементу a, і позначається $C(a)$:

$C(a) = \{b \mid (a, b)\in C\}$.

Отже, $b\in C(a) \Leftrightarrow (a, b)\in C$.

Прообразом, або ***повним прообразом***, елемента b при відповідності C називається множина всіх елементів, яким відповідає елемент b, і позначається $C^{-1}(a)$:

$C^{-1}(b) = \{a \mid (a, b)\in C\}$.

Отже, $a\in C^{-1}(b) \Leftrightarrow (a, b)\in C$.

Поняття образу та прообразу можна поширити на множини. Так, ***образом множини*** D при відповідності C є об'єднання образів усіх елементів з D:

$$C(D) = \bigcup_{a\in D} C(a) = \{b \mid \exists a\in D\ (a, b)\in C\}.$$

Прообразом множини D при відповідності C є об'єднання прообразів усіх елементів з D:

$$C^{-1}(D) = \bigcup_{b\in D} C^{-1}(b) = \{a \mid \exists b\in D\ (a, b)\in C\}.$$

Приклад 3.1. Розглянемо відповідність $C = \{(0, a), (0, b), (1, c), (2, c)\}$ між множинами $A = \{0, 1, 2, 3\}$ і $B = \{a, b, c, d\}$ (див. діаграму на рис. 3.3). Областю визначення цієї відповідності є множина $\{0, 1, 2\}$, областю значень – $\{a, b, c\}$; $C(0) = \{a, b\}$, $C(1) = \{c\}$, $C(2) = \{c\}$, $C(3) = \varnothing$; $C^{-1}(a) = \{0\}$, $C^{-1}(b) = \{0\}$, $C^{-1}(c) = \{1, 2\}$, $C^{-1}(d) = \varnothing$; $C(\{0, 1\}) = \{a, b, c\}$, $C^{-1}(\{a, b\}) = \{0\}$.

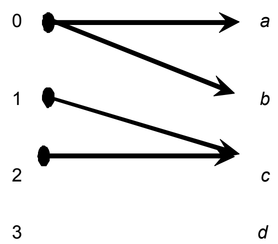

Рис. 3.3. Діаграма відповідності

Теорема 3.2. Критерій рівності відповідностей. Для відповідностей C_1 і C_2 між множинами A і B:

1) $C_1 = C_2 \Leftrightarrow \forall x \in A \;\; C_1(x) = C_2(x)$,

2) $C_1 = C_2 \Leftrightarrow \forall y \in B \;\; C_1^{-1}(y) = C_2^{-1}(y)$.

► Доведемо перший критерій. Другий доводиться аналогічно.

($\Rightarrow$) У цьому напрямку твердження очевидне.

($\Leftarrow$) $C_1 = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in C_1(x)\} = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in C_2(x)\} = C_2$. ◄

Перший критерій неявно використовується, наприклад, тоді, коли ми задаємо функцію, указуючи її значення на кожному елементі з області визначення, і тоді, коли ми перевіряємо рівність (тотожність) двох функцій, порівнюючи їх значення на елементах.

3.2.2. Обернена відповідність та її властивості

Нехай C – відповідність між множинами A і B. Відповідність $\{(b, a) \mid (a, b) \in C\}$ між множинами B і A називають ***оберненою*** до C та позначають C^{-1}.

Приклад 3.2. Відповідність $C^{-1}=\{(a, 0), (b, 0), (c, 1), (c, 2)\}$ є оберненою до відповідності $C=\{(0, a), (0, b), (1, c), (2, c)\}$ між множинами $A=\{0, 1, 2, 3\}$ і $B=\{a, b, c, d\}$.

Безпосередньо з означень маємо таке твердження.

Твердження 3.3. $i_A = i_A^{-1}$.

Теорема 3.3 про обернену відповідність. Якщо C, C_1, $C_2 \subseteq A \times B$, то

1) $\mathrm{Pr}_1(C^{-1}) = \mathrm{Pr}_2(C)$,

2) $\mathrm{Pr}_2(C^{-1}) = \mathrm{Pr}_1(C)$,

3) $(C^{-1})^{-1} = C$,

4) $(C_1 \cup C_2)^{-1} = C_1^{-1} \cup C_2^{-1}$,

5) $(C_1 \cap C_2)^{-1} = C_1^{-1} \cap C_2^{-1}$,

6) $(C_1 \setminus C_2)^{-1} = C_1^{-1} \setminus C_2^{-1}$.

► Доведемо деякі з наведених тверджень.

1) $x \in \mathrm{Pr}_1(C^{-1}) \Leftrightarrow \exists y \; (x, y) \in C^{-1} \Leftrightarrow \exists y \; (y, x) \in C \Leftrightarrow x \in \mathrm{Pr}_2(C)$.

3) $(x, y) \in (C^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in C^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in C$.

6) $(x, y) \in (C_1 \setminus C_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in C_1 \setminus C_2 \Leftrightarrow (y, x) \in C_1 \wedge \neg((y, x) \in C_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y) \in C_1^{-1} \wedge \neg((x, y) \in C_2^{-1}) \Leftrightarrow (x, y) \in C_1^{-1} \setminus C_2^{-1}$. ◄

Теорема 3.4 про монотонність операції взяття оберненої відповідності. Якщо $C_1 \subseteq A \times B$, $C_2 \subseteq A \times B$, то

$C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1^{-1} \subseteq C_2^{-1}$.

► $(x, y) \in C_1^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in C_1 \Rightarrow^{(C_1 \subseteq C_2)} (y, x) \in C_2 \Leftrightarrow (x, y) \in C_2^{-1}$. ◄

Зауваження. Якщо C – відповідність між множинами A і B, то: 1) прообраз довільного елемента множини B при відповідності C збігається з його образом при відповідності C^{-1}; 2) прообраз довільної множини D, $D \subseteq B$, при відповідності C дорівнює її образу при відповідності C^{-1}. Звідси значення виразу вигляду $C^{-1}(\cdot)$ не залежить від того, розуміємо ми його як прообраз при відповідності C або як образ при відповідності C^{-1}.

3.2.3. Властивості проекцій відповідностей

Нехай $C \subseteq A \times B$. З означень випливає, що

$x \in \mathrm{Pr}_1(C) \Leftrightarrow \exists y \;\; (x, y) \in C$

$y \in \mathrm{Pr}_2(C) \Leftrightarrow \exists x \;\; (x, y) \in C$

Твердження 3.4. Якщо $C \subseteq A \times B$, то $\mathrm{Pr}_1(C) \subseteq A$, $\mathrm{Pr}_2(C) \subseteq B$ і $C \subseteq \mathrm{Pr}_1(C) \times \mathrm{Pr}_2(C)$.

► Перші два включення випливають безпосередньо з означень. Доведемо останнє:

$(x, y) \in C \Rightarrow x \in \mathrm{Pr}_1(C) \wedge y \in \mathrm{Pr}_2(C) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{Pr}_1(C) \times \mathrm{Pr}_2(C)$,

тому $C \subseteq \mathrm{Pr}_1(C) \times \mathrm{Pr}_2(C)$. ◄

Теорема 3.5 про монотонність проекції. Якщо $C_1 \subseteq C_2 \subseteq A_1 \times A_2$, то $\mathrm{Pr}_1(C_1) \subseteq \mathrm{Pr}_1(C_2)$.

► $x \in \mathrm{Pr}_1(C_1) \Leftrightarrow \exists y \; (x, y) \in C_1 \Rightarrow^{(C_1 \subseteq C_2)} \exists y \; (x, y) \in C_2 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Pr}_1(C_2)$. ◄

Теорема 3.6 про "дистрибутивність" проекції. Якщо $D=A_1 \times A_2$ і $B \subseteq D$, $C \subseteq D$, то

1) $\mathrm{Pr}_1(B \cup C) = \mathrm{Pr}_1(B) \cup \mathrm{Pr}_1(C)$;

2) $\mathrm{Pr}_1(B \cap C) \subseteq \mathrm{Pr}_1(B) \cap \mathrm{Pr}_1(C)$;

3) $\mathrm{Pr}_1(B \setminus C) \supseteq \mathrm{Pr}_1(B) \setminus \mathrm{Pr}_1(C)$,

причому знаки включення не можна замінити знаками рівності.

► 1) $x \in \mathrm{Pr}_1(B \cup C) \Leftrightarrow \exists y \; (x, y) \in B \cup C \Leftrightarrow \exists y \; ((x, y) \in B \vee (x, y) \in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists y \; (x, y) \in B \vee \exists y \; (x, y) \in C \Leftrightarrow x \in \mathrm{Pr}_1(B) \vee x \in \mathrm{Pr}_1(C) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Pr}_1(B) \cup \mathrm{Pr}_1(C)$.

2) $x \in \mathrm{Pr}_1(B \cap C) \Leftrightarrow \exists y \; (x, y) \in B \cap C \Leftrightarrow \exists y \; ((x, y) \in B \wedge (x, y) \in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists y \; (x, y) \in B \wedge \exists y \; (x, y) \in C \Leftrightarrow x \in \mathrm{Pr}_1(B) \wedge x \in \mathrm{Pr}_1(C) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Pr}_1(B) \cap \mathrm{Pr}_1(C)$.

3) $x \in \mathrm{Pr}_1(B) \setminus \mathrm{Pr}_1(C) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Pr}_1(B) \wedge \neg(x \in \mathrm{Pr}_1(C)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists y \; (x, y) \in B \wedge \neg(\exists y \; (x, y) \in C) \Leftrightarrow \exists y \; (x, y) \in B \wedge \forall y \; (x, y) \notin C) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists y \; ((x, y) \in B \wedge (x, y) \notin C)) \Leftrightarrow \exists y \; (x, y) \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in \mathrm{Pr}_1(B \setminus C)$.

Якщо $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$, $B = \{(1, 1)\}$, $C = \{(1, 2)\}$, то $\mathrm{Pr}_1(B) = \mathrm{Pr}_1(C) = \mathrm{Pr}_1(B \setminus C) = \{1\}$, $\mathrm{Pr}_1(B \cap C) = \mathrm{Pr}_1(B) \setminus \mathrm{Pr}_1(C) = \varnothing$. Отже, у пп. 2, 3 в загальному випадку знаки включення не можна замінити знаками рівності. ◄

Зауваження. Наведені вище теореми мають місце й для декартового добутку більшої кількості множин та/або проекції на іншу вісь.

3.2.4. Властивості образу та прообразу

Відповідності є множинами, тому до них застосовні операції об'єднання, перетину, різниці, симетричної різниці. Також розглядають операцію доповнення відповідності C, $C \subseteq A \times B$, узявши як універсум множину $A \times B$.

Теорема 3.7 про монотонність образу та прообразу.

I. Для відповідності C між множинами A і B і для множин D_1 і D_2:

1) $D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow C(D_1) \subseteq C(D_2)$;

2) $D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow C^{-1}(D_1) \subseteq C^{-1}(D_2)$.

II. Для відповідностей C_1, C_2 між множинами A і B і для множини D:

1) $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1(D) \subseteq C_2(D)$;

2) $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1^{-1}(D) \subseteq C_2^{-1}(D)$.

► **I**.1) $y \in C(D_1) \Leftrightarrow \exists x\, (x \in D_1 \wedge (x, y) \in C) \Rightarrow^{(D_1 \subseteq D_2)} \exists x\, (x \in D_2 \wedge (x,y) \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in C(D_2)$.

II.1) $y \in C_1(D) \Leftrightarrow \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_1) \Rightarrow^{(C_1 \subseteq C_2)} \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in C_2(D)$. ◄

Зауваження. Якщо $A = B = \{1, 2\}$, $C = A \times B$, $D_1 = \{1\}$, $D_2 = \{1, 2\}$, то $D_1 \subset D_2$, але $C(D_1) = C(D_2) = C^{-1}(D_1) = C^{-1}(D_2) = \{1, 2\}$. Якщо $A = B = \{1, 2\}$, $C_1 = \{(1, 1)\}$, $C_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $D = \{1\}$, то $C_1 \subset C_2$, але $C_1(D) = C_2(D) = C_1^{-1}(D) = C_2^{-1}(D) = \{1\}$. Отже, за виконання строгого включення в лівій частині тверджень теореми 3.7 праворуч може досягатися рівність. Тому в загальному випадку:

$D_1 \subset D_2 \Rightarrow C(D_1) \subseteq C(D_2)$;

$D_1 \subset D_2 \Rightarrow C^{-1}(D_1) \subseteq C^{-1}(D_2)$;

$C_1 \subset C_2 \Rightarrow C_1(D) \subseteq C_2(D)$;

$C_1 \subset C_2 \Rightarrow C_1^{-1}(D) \subseteq C_2^{-1}(D)$,

і знак включення $\subseteq$ в правих частинах не можна замінити строгим включенням $\subset$.

Зауваження. Твердження, обернені до теореми 3.7, в загальному випадку хибні. Наприклад, якщо $A = B = \{1, 2\}$, $C = A \times B$, $D_1 = \{1\}$, $D_2 = \{2\}$, то $C(D_1) = C(D_2) = C^{-1}(D_1) = C^{-1}(D_2) = \{1, 2\}$, але $D_1 \not\subseteq D_2$. Якщо $A = B = \{1, 2\}$, $C_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $C_2 = \{(1, 1)\}$, $D = \{1\}$, то $C_1(D) = C_2(D) = C_1^{-1}(D) = C_2^{-1}(D) = \{1\}$, але $C_1 \not\subseteq C_2$.

Теорема 3.8 про "дистрибутивність" образу та прообразу.

I. Для відповідності C між множинами A і B і для множин D_1 і D_2:

1) $C(D_1 \cup D_2) = C(D_1) \cup C(D_2)$; 2) $C^{-1}(D_1 \cup D_2) = C^{-1}(D_1) \cup C^{-1}(D_2)$;

3) $C(D_1 \cap D_2) \subseteq C(D_1) \cap C(D_2)$; 4) $C^{-1}(D_1 \cap D_2) \subseteq C^{-1}(D_1) \cap C^{-1}(D_2)$;

5) $C(D_1 \setminus D_2) \supseteq C(D_1) \setminus C(D_2)$; 6) $C^{-1}(D_1 \setminus D_2) \supseteq C^{-1}(D_1) \setminus C^{-1}(D_2)$,

причому знаки включення не можна замінити знаками рівності.

II. Для відповідностей C_1 і C_2 між множинами A і B і для множини D:

1) $(C_1 \cup C_2)(D) = C_1(D) \cup C_2(D)$; 2) $(C_1 \cup C_2)^{-1}(D) = C_1^{-1}(D) \cup C_2^{-1}(D)$;

3) $(C_1 \cap C_2)(D) \subseteq C_1(D) \cap C_2(D)$; 4) $(C_1 \cap C_2)^{-1}(D) \subseteq C_1^{-1}(D) \cap C_2^{-1}(D)$;

5) $(C_1 \setminus C_2)(D) \supseteq C_1(D) \setminus C_2(D)$; 6) $(C_1 \setminus C_2)^{-1}(D) \supseteq C_1^{-1}(D) \setminus C_2^{-1}(D)$,

причому знаки включення не можна замінити знаками рівності.

► Доведемо деякі з наведених тверджень.

I.1) $y \in C(D_1 \cup D_2) \Leftrightarrow \exists x\, (x \in D_1 \cup D_2 \wedge (x, y) \in C) \Leftrightarrow \exists x\, ((x \in D_1 \vee x \in D_2)) \wedge$
$\wedge (x, y) \in C) \Leftrightarrow \exists x\, ((x \in D_1 \wedge (x, y) \in C) \vee (x \in D_2 \wedge (x, y) \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, (x \in D_1 \wedge (x, y) \in C) \vee \exists x\, (x \in D_2 \wedge (x, y) \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in C(D_1) \vee y \in C(D_2) \Leftrightarrow y \in C(D_1) \cup C(D_2)$.

I.3) $y \in C(D_1 \cap D_2) \Leftrightarrow \exists x\, (x \in D_1 \cap D_2 \wedge (x, y) \in C) \Leftrightarrow \exists x\, ((x \in D_1 \wedge x \in D_2)) \wedge$
$\wedge (x, y) \in C) \Leftrightarrow \exists x\, ((x \in D_1 \wedge (x, y) \in C) \wedge (x \in D_2 \wedge (x, y) \in C) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x\, (x \in D_1 \wedge (x, y) \in C) \wedge \exists x\, (x \in D_2 \wedge (x, y) \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in C(D_1) \wedge y \in C(D_2) \Leftrightarrow y \in C(D_1) \cap C(D_2)$.

I.5) $y \in C(D_1) \setminus C(D_2) \Leftrightarrow y \in C(D_1) \wedge \neg(y \in C(D_2)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, (x \in D_1 \wedge (x, y) \in C) \wedge \neg(\exists x\, (x \in D_2 \wedge (x, y) \in C)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, (x \in D_1 \wedge (x, y) \in C) \wedge \forall x\, (x \notin D_2 \vee (x, y) \notin C) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x\, (x \in D_1 \wedge (x, y) \in C \wedge (x \notin D_2 \vee (x, y) \notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, (x \in D_1 \wedge (x, y) \in C \wedge x \notin D_2) \vee (x \in D_1 \wedge (x, y) \in C \wedge (x, y) \notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, ((x \in D_1 \wedge (x, y) \in C \wedge x \notin D_2) \vee \mathrm{F}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, (x \in D_1 \wedge x \notin D_2 \wedge (x, y) \in C) \Leftrightarrow \exists x\, (x \in D_1 \setminus D_2 \wedge (x, y) \in C) \Leftrightarrow y \in C(D_1 \setminus D_2)$.

II.1) $y \in (C_1 \cup C_2)(D) \Leftrightarrow \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_1 \cup C_2) \Leftrightarrow \exists x\, (x \in D \wedge$
$\wedge ((x, y) \in C_1 \vee (x, y) \in C_2)) \Leftrightarrow \exists x\, ((x \in D \wedge (x, y) \in C_1) \vee (x \in D \wedge (x, y) \in C_2)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_1) \vee \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in C_1(D) \vee y \in C_2(D) \Leftrightarrow y \in C_1(D) \cup C_2(D)$.

II.3) $y \in (C_1 \cap C_2)(D) \Leftrightarrow \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_1 \cap C_2) \Leftrightarrow \exists x\, (x \in D \wedge$
$\wedge (x, y) \in C_1 \wedge (x, y) \in C_2)) \Leftrightarrow \exists x\, ((x \in D \wedge (x, y) \in C_1) \wedge (x \in D \wedge (x, y) \in C_2)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_1) \wedge \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in C_1(D) \wedge y \in C_2(D) \Leftrightarrow y \in C_1(D) \cap C_2(D)$.

II.5) $y \in C_1(D) \setminus C_2(D) \Leftrightarrow y \in C_1(D) \wedge \neg(y \in C_2(D)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_1) \wedge \neg(\exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_2)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_1) \wedge \forall x\, (x \notin D \vee (x, y) \notin C_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_1 \wedge (x \notin D \vee (x, y) \notin C_2)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, ((x \in D \wedge (x, y) \in C_1 \wedge x \notin D) \vee (x \in D \wedge (x, y) \in C_1 \wedge (x, y) \notin C_2)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, (\mathrm{F} \vee (x \in D \wedge (x, y) \in C_1 \wedge (x, y) \notin C_2)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_1 \wedge (x, y) \notin C_2) \Leftrightarrow \exists x\, (x \in D \wedge (x, y) \in C_1 \setminus C_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in (C_1 \setminus C_2)(D)$.

Доведемо, що знаки включення не можна замінити знаками рівності. Нехай $A = B = \{1, 2\}$. Якщо $C = \{(1, 1), (2, 1)\}$, $D_1 = \{1\}$, $D_2 = \{2\}$, то $C(D_1) = C(D_2) = \{1\}$, $C(D_1) \cap C(D_2) = \{1\}$, $C(D_1 \cap D_2) = \varnothing$, $C(D_1 \setminus D_2) = \{1\}$, $C(D_1) \setminus C(D_2) = \varnothing$, тобто в пп. I.3, I.5 включення є строгим. Якщо $C_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $C_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $D = \{1, 2\}$, то $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, $C_1 \setminus C_2 = C_1$, $C_1(D) = C_2(D) = \{1, 2\}$, $(C_1 \cap C_2)(D) = \varnothing$, $C_1(D) \cap C_2(D) = \{1, 2\}$, $C_1(D) \setminus C_2(D) = \varnothing$, $(C_1 \setminus C_2)(D) = \{1, 2\}$ і в пп. II.3, II.5 маємо строге включення. ◄

Твердження 3.5. Для відповідності C та множин $A \subseteq \mathrm{Pr}_1(C)$ і $B \subseteq \mathrm{Pr}_2(C)$:

1) $A \subseteq C^{-1}(C(A))$;

2) $B \subseteq C(C^{-1}(B))$.

► 1) $x\in A \overset{(A\subseteq \mathrm{Pr}_1(C))}{\Leftrightarrow} x\in A \wedge \exists y\ (x, y)\in C \Leftrightarrow \exists y\ (x\in A \wedge (x, y)\in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y\ (x\in A \wedge y\in C(A) \wedge (x, y)\in C) \Leftrightarrow x\in A \wedge \exists y\ (y\in C(A) \wedge (x, y)\in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in C^{-1}(C(A)) \Rightarrow x\in C^{-1}(C(A))$. ◄

3.2.5. Композиція відповідностей та її властивості

Композицією, або ***суперпозицією***, відповідностей $C\subseteq A\times B$ і $D\subseteq B\times F$ називається відповідність

$C\circ D = \{(a, c) \mid \exists b\ ((a, b)\in C \wedge (b, c)\in F)\}$.

Приклад 3.3. Нехай $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $F = \{x, y\}$, $C = \{(0, a), (0, b), (1, c), (2, c)\}$, $D = \{(a, x), (a, y)\}$, тоді $C\circ D = \{(0, x), (0, y)\}$.

Теорема 3.9 про властивості композиції. Якщо $C_1\subseteq A\times B$, $C_2\subseteq B\times G$, $C_3\subseteq G\times H$, то

1) $\mathrm{Pr}_1(C_1\circ C_2)\subseteq \mathrm{Pr}_1(C_1)$;
2) $\mathrm{Pr}_2(C_1\circ C_2)\subseteq \mathrm{Pr}_2(C_2)$;
3) $C_1\circ C_2\subseteq \mathrm{Pr}_1(C_1)\times \mathrm{Pr}_2(C_2)$;
4) $(C_1\circ C_2)\circ C_3=C_1\circ(C_2\circ C_3)$;
5) $(C_1\circ C_2)^{-1}=C_2^{-1}\circ C_1^{-1}$.

► Доведемо три з наведених тверджень.

1) $x\in \mathrm{Pr}_1(C_1\circ C_2) \Leftrightarrow \exists z\ (x, z)\in C_1\circ C_2 \Leftrightarrow \exists z\ (\exists y\ ((x, y)\in C_1 \wedge (y, z)\in C_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists z\ \exists y\ (x, y)\in C_1 \Leftrightarrow \exists y\ (x, y)\in C_1 \Leftrightarrow x\in \mathrm{Pr}_1(C_1)$.

4) $(x, y)\in(C_1\circ C_2)\circ C_3 \Leftrightarrow \exists z\ ((x, z)\in(C_1\circ C_2) \wedge (z, y)\in C_3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\ (\exists u\ ((x, u)\in C_1 \wedge (u, z)\in C_2) \wedge (z, y)\in C_3) \Leftrightarrow \exists z\ \exists u\ ((x, u)\in C_1 \wedge$
$\wedge (u, z)\in C_2 \wedge (z, y)\in C_3) \Leftrightarrow \exists u\ \exists z\ ((x, u)\in C_1 \wedge (u, z)\in C_2 \wedge (z, y)\in C_3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists u\ ((x, u)\in C_1 \wedge \exists z\ ((u, z)\in C_2 \wedge (z, y)\in C_3)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists u\ ((x, u)\in C_1 \wedge (u, y)\in C_2\circ C_3) \Leftrightarrow (x, y)\in C_1\circ(C_2\circ C_3)$.

5) $(x, y)\in(C_1\circ C_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x)\in C_1\circ C_2 \Leftrightarrow \exists z\ ((y, z)\in C_1 \wedge (z, x)\in C_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\ ((z, y)\in C_1^{-1} \wedge (x, z)\in C_2^{-1}) \Leftrightarrow \exists z\ ((x, z)\in C_2^{-1} \wedge (z, y)\in C_1^{-1}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x, y)\in C_2^{-1}\circ C_1^{-1}$. ◄

Теорема 3.10 про образ при композиції. Якщо $C_1\subseteq A\times B$, $C_2\subseteq B\times F$, то:

1) $(C_1\circ C_2)(x) = C_2(C_1(x))$ для довільного елемента x;
2) $(C_1\circ C_2)(D) = C_2(C_1(D))$ для довільної множини D.

► Доведемо перше твердження:

$y\in(C_1\circ C_2)(x) \Leftrightarrow (x, y)\in C_1\circ C_2 \Leftrightarrow \exists z\ ((x, z)\in C_1 \wedge (z, y)\in C_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\ (z\in C_1(x) \wedge (z, y)\in C_2) \Leftrightarrow y\in C_2(C_1(x))$. ◄

Теорема 3.11 про монотонність композиції. Для відповідностей $C_1, C_2\subseteq A\times B$, $D_1, D_2\subseteq B\times G$

$C_1\subseteq C_2 \wedge D_1\subseteq D_2 \Rightarrow C_1\circ D_1\subseteq C_2\circ D_2$.

► $(x, y)\in C_1\circ D_1 \Leftrightarrow \exists z\ ((x, z)\in C_1 \wedge (z, y)\in D_1) \overset{(C_1\subseteq C_2 \text{ і } D_1\subseteq D_2)}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow \exists z\ ((x, z)\in C_2 \wedge (z, y)\in D_2) \Leftrightarrow (x, y)\in C_2\circ D_2$. ◄

Теорема 3.12 про "дистрибутивність" композиції. Якщо $C_1\subseteq A\times B$, $C_2\subseteq A\times B$, $D\subseteq B\times G$, $F\subseteq H\times A$, то:

1) $(C_1\cup C_2)\circ D = (C_1\circ D)\cup(C_2\circ D)$; 2) $F\circ(C_1\cup C_2) = (F\circ C_1)\cup(F\circ C_2)$;
3) $(C_1\cap C_2)\circ D\subseteq(C_1\circ D)\cap(C_2\circ D)$; 4) $F\circ(C_1\cap C_2)\subseteq(F\circ C_1)\cap(F\circ C_2)$;

5) $(C_1\backslash C_2)\circ D\supseteq(C_1\circ D)\backslash(C_2\circ D)$; 6) $F\circ(C_1\backslash C_2)\supseteq(F\circ C_1)\backslash(F\circ C_2)$,
причому знаки включення не можна замінити знаками рівності.

► 3) $(x, y)\in(C_1\cap C_2)\circ D \Leftrightarrow \exists z\ ((x, z)\in(C_1\cap C_2) \wedge (z, y)\in D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\ (((x, z)\in C_1 \wedge (x, z)\in C_2) \wedge (z, y)\in D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\ (((x, z)\in C_1 \wedge (z, y)\in D) \wedge ((x, z)\in C_2 \wedge (z, y)\in D)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists z\ ((x, z)\in C_1 \wedge (z, y)\in D) \wedge \exists z\ ((x, z)\in C_2 \wedge (z, y)\in D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x, y)\in C_1\circ D \wedge (x, y)\in C_2\circ D \Leftrightarrow (x, y)\in(C_1\circ D)\cap(C_2\circ D)$.

5) $(x, y)\in(C_1\circ D)\backslash(C_2\circ D) \Leftrightarrow (x, y)\in C_1\circ D \wedge \neg((x, y)\in C_2\circ D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\ ((x, z)\in C_1 \wedge (z, y)\in D) \wedge \neg(\exists z\ ((x, z)\in C_2 \wedge (z, y)\in D)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\ ((x, z)\in C_1 \wedge (z, y)\in D) \wedge \forall z\ ((x, z)\notin C_2 \vee (z, y)\notin D) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists z\ ((x, z)\in C_1 \wedge (z, y)\in D \wedge ((x, z)\notin C_2 \vee (z, y)\notin D)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\ (((x, z)\in C_1 \wedge (z, y)\in D \wedge (x, z)\notin C_2) \vee$
$\vee ((x, z)\in C_1 \wedge (z, y)\in D \wedge (z, y)\notin D))) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\ (((x, z)\in C_1 \wedge (z, y)\in D \wedge (x, z)\notin C_2) \vee \mathrm{F}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\ (((x, z)\in C_1 \wedge (x, z)\notin C_2 \wedge (z, y)\in D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\ (((x, z)\in C_1\backslash C_2 \wedge (z, y)\in D) \Leftrightarrow (x, y)\in(C_1\backslash C_2)\circ D$.

Наведемо приклад строгого включення в пп. 3, 5: $A = B = G = \{1, 2\}$, $C_1 = \{(1, 1)\}$, $C_2 = \{(1, 2)\}$, $D = \{(1, 1), (2, 1)\}$. Тоді $C_1\cap C_2 = \varnothing$, $C_1\backslash C_2 = C_1$, $C_1\circ D = C_2\circ D = \{(1, 1)\}$, $(C_1\cap C_2)\circ D = \varnothing$, $(C_1\circ D)\cap(C_2\circ D) = \{(1, 1)\}$, $(C_1\circ D)\backslash(C_2\circ D) = \varnothing$, $(C_1\backslash C_2)\circ D = \{(1, 1)\}$. ◄

Теорема 3.13 про композицію з діагоналлю. Якщо $C\subseteq A\times B$, то:

1) $i_A\circ C = C$;
2) $C\circ i_B = C$.

► 1) $(x, y)\in i_A\circ C \Leftrightarrow \exists z\ ((x, z)\in i_A \wedge (z, y)\in C) \Leftrightarrow \exists z\ (x\in A \wedge x = z \wedge$
$\wedge (z, y)\in C) \Leftrightarrow \exists z\ (x\in A \wedge x=z \wedge (x, y)\in C) \Leftrightarrow (\exists z\ x=z) \wedge x\in A \wedge (x, y)\in C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge (x, y)\in C \overset{(C\subseteq A\times B)}{\Leftrightarrow} (x, y)\in C$. Рівність (2) доводиться аналогічно. ◄

Наслідок 3.1. $i_A\circ i_A = i_A$.

Зауваження. Очевидно, що $x\in i_A \Leftrightarrow \exists a\in A\ x=(a, a)$ та $a\in A \Leftrightarrow (a, a)\in i_A$. Звідси для доведення $i_A\subseteq M$ достатньо довести $a\in A \Rightarrow (a, a)\in M$.

Задачі

3.1. Довести тотожності 2, 4, 6 з теореми 3.1.

3.2. Довести, що:

а) $(A\cup B)\times(C\cup D) = (A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$;
б) $(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C)\cap(B\times D) = (A\times D)\cap(B\times C)$.

3.3. Довести, що $(A\times C)\cup(B\times D)\subseteq(A\cup B)\times(C\cup D)$ і знак включення не можна замінити знаком рівності.

3.4. Довести, що для довільних підмножин A і B універсуму U виконується рівність $U^2\backslash(A\times B) = (\overline{A}\times U)\cup(U\times \overline{B})$.

3.5. Довести, що:

а) $(\bigcap\limits_{i\in I} A_i)\times(\bigcap\limits_{j\in J} B_j) = \bigcap\limits_{(i,j)\in I\times J}(A_i\times B_j)$;

б) $(\bigcup_{i\in I} A_i)\times(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i\times B_j)$.

3.6. Довести п. 2 теореми 3.2.

3.7. Довести пп. 2, 4, 5 теореми 3.3.

3.8. Довести, що для довільної непорожньої сім′ї відповідностей $\{C_i\}_{i\in I}$ між множинами A і B виконуються рівності:

а) $(\bigcup_{i\in I} C_i)^{-1} = \bigcup_{i\in I} C_i^{-1}$,

б) $(\bigcap_{i\in I} C_i)^{-1} = \bigcap_{i\in I} C_i^{-1}$.

3.9. Нехай B, $C\subseteq A_1\times A_2$. Довести, що $\mathrm{Pr}_1(B)\div\mathrm{Pr}_1(C)\subseteq\mathrm{Pr}_1(B\div C)$.

3.10. Довести пп. **I**.2, **II**.2 теореми 3.7.

3.11. Довести пп. **I**.2, **I**.4, **I**.6 теореми 3.8.

3.12. Довести пп. **II**.2, **II**.4, **II**.6 теореми 3.8.

3.13. Довести, що для довільної відповідності C між множинами A і B і для довільних множин D_1 і D_2 виконуються співвідношення:

а) $C(D_1)\div C(D_2)\subseteq C(D_1\div D_2)$;

б) $C^{-1}(D_1)\div C^{-1}(D_2)\subseteq C^{-1}(D_1\div D_2)$,

і ці включення не можна замінити рівностями.

3.14. Довести, що для довільних відповідностей C_1 і C_2 між множинами A і B і для довільної множини D виконуються співвідношення:

а) $C_1(D)\div C_2(D)\subseteq(C_1\div C_2)(D)$;

б) $C_1^{-1}(D)\div C_2^{-1}(D)\subseteq(C_1\div C_2)^{-1}(D)$,

і ці включення не можна замінити рівностями.

3.15. Довести, що для довільної відповідності C між множинами A і B і для довільної сім′ї множин $\{A_i\}_{i\in I}$ виконуються рівності:

а) $C(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} C(A_i)$;

б) $C^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} C^{-1}(A_i)$.

3.16. Довести, що для довільної відповідності C між множинами A і B і для довільної непорожньої сім′ї множин $\{A_i\}_{i\in I}$ виконуються співвідношення:

а) $C(\bigcap_{i\in I} A_i)\subseteq\bigcap_{i\in I} C(A_i)$;

б) $C^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i)\subseteq\bigcap_{i\in I} C^{-1}(A_i)$,

і ці включення не можна замінити рівностями.

3.17. Довести, що для довільної сім′ї відповідностей $\{C_i\}_{i\in I}$ між множинами A і B і для довільної множини D виконуються співвідношення:

а) $(\bigcup_{i\in I} C_i)(D) = \bigcup_{i\in I} C_i(D)$;

б) $(\bigcup_{i\in I} C_i)^{-1}(D) = \bigcup_{i\in I} C_i^{-1}(D)$.

3.18. Довести, що для довільної непорожньої сім′ї відповідностей $\{C_i\}_{i\in I}$ між множинами A і B і для довільної множини D виконуються співвідношення:

а) $(\bigcap_{i\in I} C_i)(D)\subseteq\bigcap_{i\in I} C_i(D)$;

б) $(\bigcap_{i\in I} C_i)^{-1}(D)\subseteq\bigcap_{i\in I} C_i^{-1}(D)$,

і ці включення не можна замінити рівностями.

3.19. Довести, що для довільної відповідності C між множинами A і B виконуються співвідношення:

а) $C(A\backslash\mathrm{Pr}_1(C)) = \varnothing$, $C(A) = C(\mathrm{Pr}_1(C)) = \mathrm{Pr}_2(C)\subseteq B$;

б) $C^{-1}(B\backslash\mathrm{Pr}_2(C)) = \varnothing$, $C^{-1}(B) = C^{-1}(\mathrm{Pr}_2(C)) = \mathrm{Pr}_1(C)\subseteq A$.

3.20. Довести п. 2 твердження 3.5.

3.21. Довести, що для довільної відповідності C і для довільних множин A і B виконуються співвідношення:

а) $A\cap C^{-1}(B)\subseteq C^{-1}(C(A)\cap B)$;

б) $C(A)\cap B\subseteq C(A\cap C^{-1}(B))$.

3.22. Довести, що для довільної відповідності C і для довільних множин A і B рівність $C(A)\cap B = \varnothing$ має місце тоді й тільки тоді, коли $A\cap C^{-1}(B) = \varnothing$.

3.23. Довести, що для довільної відповідності C і для довільних множин $A\subseteq\mathrm{Pr}_1(C)$ і $B\subseteq\mathrm{Pr}_2(C)$ з включення $C(A)\subseteq B$ випливає $A\subseteq C^{-1}(B)$.

3.24. Довести, що для довільної відповідності C і для довільних множин $A\subseteq\mathrm{Pr}_1(C)$ і $B\subseteq\mathrm{Pr}_2(C)$ з включення $C^{-1}(B)\subseteq A$ випливає $B\subseteq C(A)$.

3.25. Нехай задано відповідності C_1 і C_2 між R і R. Визначити відповідність $C_1\circ C_2$, якщо:

а) $C_1 = \{(x, y) \mid x = y^2\}$, $C_2 = \{(x, y) \mid x^2 = y\}$;

б) $C_1 = \{(x, y) \mid y = x+1\}$, $C_2 = \{(x, y) \mid y = |x|\}$.

3.26. Довести п. 2 теореми 3.9.

3.27. Для $C_1\subseteq A\times B$, $C_2\subseteq B\times F$ довести, що

$C_1\circ C_2 = \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{Pr}_2(C_1)\cap\mathrm{Pr}_1(C_2) = \varnothing$.

3.28. Довести п. 2 теореми 3.10.

3.29. Довести п. 2 теореми 3.11.

3.30. Довести: якщо $C_1\subseteq A\times B$, $C_2\subseteq A\times B$, $D_1\subseteq B\times G$, $D_2\subseteq B\times G$, $C_1\subseteq C_2$ і $D_1\subseteq D_2$, то $C_1\circ D_1\subseteq C_2\circ D_2$.

3.31. Довести пп. 1, 2, 4, 6 теореми 3.12.

3.32. Довести, що для довільних відповідностей $C_1\subseteq A\times B$, $C_2\subseteq A\times B$, $D\subseteq B\times G$, $F\subseteq H\times A$ виконуються співвідношення:

а) $(C_1\circ D)\div(C_2\circ D)\subseteq(C_1\div C_2)\circ D$;

б) $(F\circ C_1)\div(F\circ C_2)\subseteq F\circ(C_1\div C_2)$,

і включення не можна замінити рівностями.

3.33. Довести, що для довільної непорожньої сім′ї відповідностей $\{C_i\}_{i\in I}$ між множинами A і B і для довільних відповідностей $D\subseteq B\times G$, $F\subseteq H\times A$ виконуються співвідношення:

а) $(\bigcup\limits_{i\in I} C_i)\circ D = \bigcup\limits_{i\in I}(C_i\circ D)$;

б) $F\circ(\bigcup\limits_{i\in I} C_i) = \bigcup\limits_{i\in I}(F\circ C_i)$;

в) $(\bigcap\limits_{i\in I} C_i)\circ D\subseteq\bigcap\limits_{i\in I}(C_i\circ D)$;

г) $F\circ(\bigcap\limits_{i\in I} C_i)\subseteq\bigcap\limits_{i\in I}(F\circ C_i)$,

і включення не можна замінити рівностями.

3.34. Довести п. 2 теореми 3.13.

ГЛАВА 4. Спеціальні типи відповідностей

4.1. Основні типи відповідностей

4.1.1. Усюди визначені та сюр'єктивні відповідності

Відповідність C між множинами A і B називається ***всюди визначеною***, якщо образ кожного елемента з множини A непорожній, тобто $\mathrm{Pr}_1(C) = A$, або $\forall x\in A\ \exists y\in B\ (x, y)\in C$, або $x\in A \Rightarrow \exists y\in B\ (x, y)\in C$. Відповідність між множиною людей та множиною імен є всюди визначеною, оскільки кожна людина має ім'я. Відповідність, що не є всюди визначеною, інколи називається ***частковою***.

Відповідність C між множинами A і B називається ***сюр'єктивною***, або ***сюр'єкцією***, або ***відповідністю на*** множину B, якщо прообраз кожного елемента з множини B непорожній, тобто $\mathrm{Pr}_2(C) = B$, або $\forall y\in B\ \exists x\in A\ (x, y)\in C$, або $y\in B \Rightarrow \exists x\in A\ (x, y)\in C$. Наприклад, відповідність між множиною тролейбусних маршрутів і множиною діючих тролейбусних зупинок є сюр'єктивною, оскільки кожній діючій зупинці відповідає хоча б один тролейбусний маршрут.

Неважко помітити, що означення всюди визначеності та сюр'єктивності двоїсті одне до одного.

Твердження 4.1. Відповідність C між множинами A і B є всюди визначеною тоді й тільки тоді, коли обернена відповідність C^{-1} є сюр'єктивною.

► C всюди визначена $\Leftrightarrow \forall x\in A\ \exists y\ (x, y)\in C \Leftrightarrow \forall x\in A\ \exists y\ (y, x)\in C^{-1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow C^{-1}$ сюр'єктивна. ◄

4.1.2. Функціональні та ін'єктивні відповідності

Відповідність C між множинами A і B називається ***функціональною***, або ***функцією***, якщо образ кожного елемента з множини A складається не більш ніж з одного елемента, тобто образ кожного елемента із $\mathrm{Pr}_1(C)$ містить рівно один елемент.

Означення функціональності можна також виразити твердженням $\forall x\in\mathrm{Pr}_1(C)\ \exists! y\ (x, y)\in C$. Запис $\exists!$ означає "існує, і при тому єдиний". Запис вигляду $\exists! x\ P(x)$, де $P(x)$ – деяке твердження, еквівалентний такому: $\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y)\rightarrow(x = y)))$.

За іншим означенням, відповідність C називається функціональною, якщо $\forall x\ (((x, y_1)\in C \wedge (x, y_2)\in C) \rightarrow (y_1 = y_2))$, тобто тотожно-істинним є твердження $((x, y_1)\in C \wedge (x, y_2)\in C) \Rightarrow (y_1=y_2)$. Наведені означення функціональної відповідності еквівалентні.

Наприклад, функціональною є відповідність між громадянами країни та їх ідентифікаційними номерами, а також між стільцями та студентами, які сидять на них (вважаємо, що на кожному стільці сидить не більше ніж один студент).

Функціональну відповідність f між A і B інколи називають ***функцією з** A **в** B*, кажуть, що функція f має ***тип*** $A \to B$, та позначають це записом $f{:}A \to B$ або $A \xrightarrow{f} B$. У функції $f{:}A \to B$ множину $f(x)$, де $x \in \mathrm{Pr}_1(f)$, складено єдиним елементом, скажімо, y. Тому інколи під записом $f(x)$ розуміють не множину $\{y\}$, а саме елемент y, і кажуть, що $f(x)$ є ***значенням функції*** f на аргументі x. Такі позначення, зокрема, дуже поширені в математичному аналізі. У подальшому ми будемо користуватися таким спрощенням запису, тільки якщо це не створюватиме двозначності.

Зауважимо, що в контексті теорії множин функція може бути частковою відповідністю. Для функції f з A в B можна розглядати її ***звуження*** $f|_{A_1}$ на множину A_1, де $A_1 \subseteq A$. За означенням, $f|_{A_1} = f \cap (A_1 \times B)$, тобто звуження зменшує область визначення функції.

Усюди визначену функціональну відповідність між A і B називають ***відображенням*** з A в B. Отже, відображення є окремим випадком функції. Множину всіх відображень з A в B позначають B^A. За означенням $B^A \subseteq P(A \times B)$. Відображення типу $A \to A$ називають ***перетворенням*** множини A.

Відповідність C між множинами A і B називається ***ін'єктивною***, або ***ін'єкцією***, якщо прообраз кожного елемента з множини B містить не більш ніж один елемент, тобто прообраз кожного елемента з $\mathrm{Pr}_2(C)$ складено рівно з одного елемента. Ін'єктивність відповідності C можна виразити також твердженням $\forall y \in \mathrm{Pr}_2(C)\ \exists! x\ (x, y) \in C$.

За іншим означенням, відповідність C називається ін'єктивною, якщо $\forall y\ (((x_1, y) \in C \wedge (x_2, y) \in C) \to (x_1 = x_2))$, тобто твердження $((x_1, y) \in C \wedge (x_2, y) \in C) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ є тотожно-істинним. Наведені означення ін′єктивної відповідності еквівалентні.

Наприклад, відповідність між студентами та стільцями є ін'єктивною (вважаємо, що на кожному стільці сидить не більше одного студента).

Інколи ін'єктивну відповідність називають ***1-1 відповідністю***, функціональну 1-1 відповідність – ***1-1 функцією***, а ін'єктивне відображення – ***взаємно однозначним відображенням***.

Неважко бачити, що діагональ i_A є всюди визначеною, функціональною, ін'єктивною та сюр'єктивною відповідністю типу $A \to A$.

Умови функціональності та ін'єктивності можна сформулювати ще й у такий спосіб.

Відповідність C називається функціональною, якщо різним "y" відповідають різні "x": $(y_1 \neq y_2 \Rightarrow C^{-1}(y_1) \cap C^{-1}(y_2) = \varnothing)$.

Відповідність C називається ін'єктивною, якщо різним "x" відповідають різні "y": $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow C(x_1) \cap C(x_2) = \varnothing)$.

Приклад 4.1. При відповідності $C_1 = \{(x, y) | x \in N \wedge (y$ є остачею при діленні x націло на 10$)\}$ кожному натуральному числу відповідає його остача при діленні на 10. C_1 є всюди визначеною функціональною відповідністю між N і N, тобто відображенням з N в N, але вона не є

ін'єктивною. Вона є сюр'єкцією між N і $\{0, 1, \ldots, 9\}$, але не сюр'єкцією між N і N.

Приклад 4.2. Розглянемо відповідності між R і R:

$C_2 = \{(x, y) \mid x \in R \wedge (y = x^2)\}$,

$C_3 = \{(x, y) \mid x \in R \wedge (y^2 = x)\}$,

$C_4 = \{(x, y) \mid x \in R \wedge (y = 1/x)\}$.

Серед них всюди визначеною є тільки C_2, функціональними – C_2 і C_4, відображенням – C_2, сюр'єктивною – C_3, ін'єктивною – C_4.

Означення функціональності та ін'єктивності також є двоїстими одне до одного.

Твердження 4.2. Відповідність C між множинами A і B є функціональною тоді й тільки тоді, коли обернена відповідність C^{-1} є ін'єктивною.

► C функція $\Leftrightarrow \forall y_1\ \forall y_2\ \forall x\ (((x, y_1) \in C \wedge (x, y_2) \in C) \to (y_1 = y_2)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall y_1\ \forall y_2\ \forall x\ (((y_1, x) \in C^{-1} \wedge (y_2, x) \in C^{-1}) \to (y_1 = y_2)) \Leftrightarrow C^{-1}$ ін'єктивна. ◄

4.1.3. Приклади функцій

Розглянемо кілька важливих прикладів функцій.

Послідовність. Нескінченна послідовність $\{a_n\}_{n \in N}$ елементів множини A – це відображення з N в A. Скінченна послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n$ елементів множини A довжини n – це відображення з множини $\overline{1,n}$ в A. Отже, усі нескінченні послідовності елементів множини A утворюють множину A^N, усі послідовності елементів множини A довжини n – множину $A^{\overline{1,n}}$, яку можна інтерпретувати також як A^n.

Нумерація. Довільне сюр'єктивне відображення φ множини натуральних чисел N на множину A називається ***нумерацією*** множини A. При цьому кажуть, що для об'єкта $a \in A$ множина $\varphi^{-1}(a)$ є множиною його ***номерів***.

Характеристична функція множини. Нехай M – непорожня множина. Для будь-якої підмножини A множини M означимо ***характеристичну функцію*** χ_A^M множини A: $\chi_A^M(x) = 1$, якщо $x \in A$; $\chi_A^M(x) = 0$, якщо $x \in M \backslash A$. Характеристична функція χ_A^M множини A є відображенням типу $M \to \{0, 1\}$. Наприклад, якщо $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{1, 3\}$, то $\chi_A^M = \{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 1)\}$.

Декартів добуток сім′ї множин. Поняття декартового добутку можна узагальнити на довільну непорожню сукупність множин. Декартовим добутком сім′ї множин $\{A_i\}_{i \in I}$ називається множина

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid (f \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^I) \wedge (\forall i \in I\ \ f(i) \in A_i)\},$$

тобто множина всіх можливих відображень, які кожному елементу i з I ставлять у відповідність елемент з множини A_i.

4.2. Властивості відповідностей спеціальних типів

4.2.1. Критерії типізацій відповідностей

Теорема 4.1. Критерій всюди визначеності. Відповідність C між множинами A і B є всюди визначеною тоді й тільки тоді, коли $i_A \subseteq C \circ C^{-1}$.

► $(\Rightarrow)$ $a \in A \Rightarrow^{(C \text{ всюди визначена})} \exists b\ (a, b) \in C \Leftrightarrow$
$\exists b\ ((a, b) \in C \wedge (b, a) \in C^{-1}) \Rightarrow (a, a) \in C \circ C^{-1}$.
$(\Leftarrow)$ $a \in A \Leftrightarrow (a, a) \in i_A \Rightarrow^{(i_A \subseteq C \circ C^{-1})} (a, a) \in C \circ C^{-1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists b\ ((a, b) \in C \wedge (b, a) \in C^{-1}) \Leftrightarrow \exists b\ (a, b) \in C$. ◄

Теорема 4.2. Критерій сюр'єктивності. Відповідність C між множинами A і B є сюр'єктивною тоді й тільки тоді, коли $i_B \subseteq C^{-1} \circ C$.

► $(\Rightarrow)$ $b \in B \Rightarrow^{(C \text{ сюр'єктивна})} \exists a\ (a, b) \in C \Leftrightarrow \exists a\ ((b, a) \in C^{-1} \wedge (a, b) \in C\ ) \Rightarrow$
$\Rightarrow (b, b) \in C^{-1} \circ C$.
$(\Leftarrow)$ $b \in B \Leftrightarrow (b, b) \in i_B \Rightarrow^{(i_B \subseteq C^{-1} \circ C)} (b, b) \in C^{-1} \circ C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists a\ ((b, a) \in C^{-1} \wedge (a, b) \in C) \Leftrightarrow \exists a\ (a, b) \in C$. ◄

Теорема 4.3. Критерій функціональності. Відповідність C між множинами A і B є функціональною тоді й тільки тоді, коли $C^{-1} \circ C \subseteq i_B$.

► $(\Rightarrow)$ $(x, y) \in C^{-1} \circ C \Leftrightarrow^{(C \subseteq A \times B)} x \in B \wedge (x, y) \in C^{-1} \circ C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in B \wedge \exists z\ ((x, z) \in C^{-1} \wedge (z, y) \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in B \wedge \exists z\ ((z, x) \in C \wedge (z, y) \in C) \Rightarrow^{(C \text{ функціональна})}$
$\Rightarrow x \in B \wedge \exists z\ ((z, x) \in C \wedge (z, y) \in C \wedge (x = y)) \Rightarrow x \in B \wedge (x = y) \Leftrightarrow (x, y) \in i_B$.
$(\Leftarrow)$ $(x, y_1) \in C \wedge (x, y_2) \in C \Leftrightarrow (y_1, x) \in C^{-1} \wedge (x, y_2) \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow (y_1, y_2) \in C^{-1} \circ C \Rightarrow^{(C^{-1} \circ C \subseteq i_B)} (y_1, y_2) \in i_B \Rightarrow y_1 = y_2$. ◄

Теорема 4.4. Критерій ін'єктивності. Відповідність C між множинами A і B є ін'єктивною тоді й тільки тоді, коли $C \circ C^{-1} \subseteq i_A$.

► $(\Rightarrow)$ $(x, y) \in C \circ C^{-1} \Leftrightarrow^{(C \subseteq A \times B)} x \in A \wedge (x, y) \in C \circ C^{-1} \Leftrightarrow x \in A \wedge$
$\wedge \exists z\ ((x, z) \in C \wedge (z, y) \in C^{-1}) \Leftrightarrow x \in A \wedge \exists z\ ((x, z) \in C \wedge (y, z) \in C) \Rightarrow^{(C \text{ ін'єктивна})}$
$\Rightarrow x \in A \wedge \exists z\ ((x, z) \in C \wedge (y, z) \in C \wedge (x = y)) \Rightarrow x \in A \wedge (x = y) \Leftrightarrow (x, y) \in i_A$.
$(\Leftarrow)$ $(x_1, y) \in C \wedge (x_2, y) \in C \Leftrightarrow (x_1, y) \in C \wedge (y, x_2) \in C^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_1, x_2) \in C \circ C^{-1} \Rightarrow^{(C \circ C^{-1} \subseteq i_A)} (x_1, x_2) \in i_A \Rightarrow x_1 = x_2$. ◄

Безпосередньо з критеріїв всюди визначеності та функціональності отримуємо такий наслідок.

Наслідок 4.1. Відповідність C між множинами A і B є відображенням тоді й тільки тоді, коли $i_A \subseteq C \circ C^{-1}$ і $C^{-1} \circ C \subseteq i_B$.

4.2.2. Інваріантність типів відповідностей відносно теоретико-множинних операцій

Додавання нових елементів до всюди визначеної (або сюр'єктивної) відповідності, тобто її поповнення, зберігає її властивість бути всюди визначеною (або сюр'єктивною), а вилучення елементів може цю властивість порушити. З іншого боку, функціональність та ін'єктивність накладають обмеження єдиності. Тому вилучення елементів (зменшення) функціональної (або ін'єктивної) відповідності зберігає її властивість бути

функціональною (або ін'єктивною), але поповнення може порушити умову єдиності, а тоді й властивість відповідності бути функціональною або ін'єктивною. Викладемо наведені міркування більш формально.

Твердження 4.3. Нехай C, D – відповідності між множинами A і B, такі, що $C \subseteq D$.

1) Якщо C є всюди визначеною, то D є всюди визначеною.
2) Якщо C є сюр'єктивною, то D є всюди сюр'єктивною.
3) Якщо D є функціональною, то C є функціональною.
4) Якщо D є ін'єктивною, то C є ін'єктивною.

► 1) C – всюди визначена $\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists y \in B\ (x, y) \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow^{(C \subseteq D)} \forall x \in A\ \exists y \in B\ (x, y) \in D \Leftrightarrow D$ – всюди визначена.
3) D – функціональна $\Leftrightarrow \forall y_1\ \forall y_2\ \forall x\ (((x, y_1) \in D \wedge (x, y_2) \in D) \rightarrow$
$\rightarrow (y_1 = y_2)) \Rightarrow^{(C \subseteq D)} \forall y_1\ \forall y_2\ \forall x\ (((x, y_1) \in C \wedge (x, y_2) \in C) \rightarrow (y_1 = y_2)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow C$ – функціональна. ◄

Приклад 4.3. Нехай $A = B = \{1,\ 2\}$, $C = \{(1,\ 2)\}$, $D = \{(1, 2),\ (2, 1)\}$, $E = A \times B$ – відповідності між A і B. Маємо, що відповідність D є всюди визначеною, функціональною, ін'єктивною й сюр'єктивною; C є її підмножиною; E – надмножиною. При цьому відповідність C між A і B не є ні всюди визначеною, ні сюр'єктивною, а E – ні функціональною, ні ін'єктивною.

З твердження 4.3 випливає, що властивість всюди визначеності (або сюр'єктивності) відповідностей зберігається при їх об'єднанні, тобто є ***інваріантною відносно об'єднання***. Аналогічно, властивість функціональності (або ін'єктивності) відповідностей є інваріантною відносно їх перетину, різниці та симетричної різниці. Доведення залишаємо для вправи.

Водночас, всюди визначеність та сюр'єктивність не є інваріантними відносно перетину, різниці або симетричної різниці, а функціональність та ін'єктивність – відносно об'єднання. Побудову відповідних контрприкладів також залишаємо для вправи.

4.2.3. Інваріантність типів відповідностей відносно операції композиції $\circ$

Лема 4.1. Якщо C_1 і C_2 – всюди визначені відповідності між A і B та B і F відповідно, то $C_1 \circ C_2$ є всюди визначеною відповідністю між A і F.

► *Перший спосіб*. $a \in A \Rightarrow^{(C_1 \subseteq A \times B \text{ всюди визначена})} \exists b\ (b \in B \wedge (a, b) \in C_1) \Rightarrow$
$\Rightarrow^{(C_2 \subseteq B \times F \text{ всюди визначена})} \exists b\ \exists c\ ((a, b) \in C_1 \wedge (b, c) \in C_2) \Rightarrow \exists c\ (a, c) \in C_1 \circ C_2$.

Другий спосіб. Скористаємось критерієм всюди визначеності:
$i_A \subseteq C_1 \circ C_1^{-1} = C_1 \circ i_B \circ C_1^{-1} \subseteq C_1 \circ (C_2 \circ C_2^{-1}) \circ C_1^{-1} = C_1 \circ C_2 \circ C_2^{-1} \circ C_1^{-1} =$
$= (C_1 \circ C_2) \circ (C_1 \circ C_2)^{-1}$.
Отже, відповідність $C_1 \circ C_2$ є всюди визначеною на A за критерієм. ◄

Зауваження. Те, що відповідність $C_1 \circ C_2$ є відповідністю між A і F, випливає з означення композиції і не є головним у лемі 4.1. Тому на цьому в доведенні не наголошується, хоча формально цей факт потребує доведення. Те саме стосується й доведення наступних тверджень цього підрозділу.

Лема 4.2. Якщо C_1 і C_2 – функціональні відповідності між A і B та B і F відповідно, то $C_1 \circ C_2$ є функціональною відповідністю між A і F.

► $(a, c_1) \in C_1 \circ C_2 \wedge (a, c_2) \in C_1 \circ C_2 \Leftrightarrow \exists b_1\, ((a, b_1) \in C_1 \wedge (b_1, c_1) \in C_2) \wedge$
$\wedge\, \exists b_2\, ((a, b_2) \in C_1 \wedge (b_2, c_2) \in C_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists b_1 \exists b_2\, (\underline{(a, b_1) \in C_1} \wedge (b_1, c_1) \in C_2 \wedge \underline{(a, b_2) \in C_1} \wedge (b_2, c_2) \in C_2) \Rightarrow^{(C_1 \text{ – функція})}$
$\Rightarrow \exists b_1 \exists b_2\, (\, (b_1, c_1) \in C_2 \wedge (b_2, c_2) \in C_2 \wedge (b_1 = b_2)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists b_1\, (\, (b_1, c_1) \in C_2 \wedge (b_1, c_2) \in C_2) \Rightarrow^{(C_2 \text{ – функція})} c_1 = c_2$. ◄

Лема 4.3. Якщо C_1 і C_2 – відображення із A в B і B в F відповідно, то $C_1 \circ C_2$ є відображенням з A в F.

► Якщо C_1 та C_2 обидві є всюди визначеними й функціональними відповідностями, то за лемами 4.1, 4.2 відповідність $C_1 \circ C_2$ є всюди визначенною та функціональною відповідністю між A і F, а отже, відображенням з A в F. ◄

Лема 4.4. Якщо C_1 і C_2 – сюр′єктивні відповідності між A і B та B і F відповідно, то $C_1 \circ C_2$ є сюр′єктивною відповідністю між A і F.

► Відповідності C_1 і C_2 сюр'єктивні, тому відповідності C_1^{-1} і C_2^{-1} є всюди визначеними, а тоді за лемою 4.1 відповідність $C_2^{-1} \circ C_1^{-1}$ між F і A є всюди визначеною. За властивостями композиції $(C_1 \circ C_2)^{-1} = C_2^{-1} \circ C_1^{-1}$, тоді відповідність $(C_1 \circ C_2)^{-1}$ також є всюди визначеною між F і A. Тоді $C_1 \circ C_2$ є сюр'єктивною відповідністю між A і F. ◄

Лема 4.5. Якщо C_1 і C_2 – ін′єктивні відповідності між A і B та B і F відповідно, то $C_1 \circ C_2$ є ін′єктивною відповідністю між A і F.

► Відповідності C_1 і C_2 ін'єктивні, тому відповідності C_1^{-1} і C_2^{-1} є функціональними, а тоді за лемою 4.2 відповідність $C_2^{-1} \circ C_1^{-1}$ між F і A є функціональною. Проте $(C_1 \circ C_2)^{-1} = C_2^{-1} \circ C_1^{-1}$, тому $(C_1 \circ C_2)^{-1}$ є функціональною відповідністю між F і A. Тоді $C_1 \circ C_2$ є ін'єктивною відповідністю між A і F. ◄

На підставі доведених лем маємо загальну теорему.

Теорема 4.5 про інваріантність типів відповідностей відносно операції композиції. Операція композиції відповідностей зберігає властивості відповідностей бути всюди визначеними, функціональними, ін'єктивним, сюр'єктивними, відображеннями.

4.2.4. Додаткові властивості функцій

Теорема 4.6 про властивості функцій. Якщо C є функціональною відповідністю, A та B – довільні підмножини $\mathrm{Pr}_2(C)$, то:

1) $B = C(C^{-1}(B))$;
2) з $C^{-1}(A) \subseteq C^{-1}(B)$ випливає $A \subseteq B$;
3) з $C^{-1}(A) = C^{-1}(B)$ випливає $A = B$;
4) $C^{-1}(A \cap B) = C^{-1}(A) \cap C^{-1}(B)$;
5) $C^{-1}(A \backslash B) = C^{-1}(A) \backslash C^{-1}(B)$.

► 1) Включення $B \subseteq C(C^{-1}(B))$ виконується за твердженням 3.5. Доведемо обернене включення.

$y \in C(C^{-1}(B)) \Leftrightarrow \exists x\, (x \in C^{-1}(B) \wedge (x, y) \in C) \Leftrightarrow \exists x\, (\exists z\, (z \in B \wedge (x, z) \in C) \wedge$
$\wedge\, (x, y) \in C) \Leftrightarrow \exists x\, \exists z\, (z \in B \wedge (x, z) \in C \wedge (x, y) \in C) \Rightarrow^{(C\text{-функція})}$
$\Rightarrow \exists x\, \exists z\, (z \in B \wedge (y = z)) \Leftrightarrow y \in B$.

Отже, $C(C^{-1}(B)) \subseteq B$. У підсумку маємо $B = C(C^{-1}(B))$.

2) За властивостями образу з включення $C^{-1}(A) \subseteq C^{-1}(B)$ випливає включення $C(C^{-1}(A)) \subseteq C(C^{-1}(B))$. За п. 1 $A = C(C^{-1}(A)) \subseteq C(C^{-1}(B)) = B$, що й треба було довести.

3) З використанням п. 2 маємо такий логічний ланцюжок:
$C^{-1}(A) = C^{-1}(B) \Leftrightarrow C^{-1}(A) \subseteq C^{-1}(B) \wedge C^{-1}(B) \subseteq C^{-1}(A) \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$.

4) $x \in C^{-1}(A) \cap C^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in C^{-1}(A) \wedge x \in C^{-1}(B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y_1\, (y_1 \in A \wedge (x, y_1) \in C) \wedge \exists y_2\, (y_2 \in B \wedge (x, y_2) \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y_1\, \exists y_2\, (y_1 \in A \wedge (x, y_1) \in C \wedge y_2 \in B \wedge (x, y_2) \in C) \Leftrightarrow^{(\Rightarrow\, C \text{ – функція},\ \Leftarrow \text{ лог.закони})}$
$\Leftrightarrow \exists y_1\, \exists y_2\, (y_1 \in A \wedge (x, y_1) \in C \wedge y_2 \in B \wedge (x, y_2) \in C \wedge (y_1 = y_2)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y_1\, (y_1 \in A \wedge y_1 \in B \wedge (x, y_1) \in C\,) \Leftrightarrow x \in C^{-1}(A \cap B)$.

5) За властивостями прообразу маємо $C^{-1}(A) \backslash C^{-1}(B) \subseteq C^{-1}(A \backslash B)$. Доведемо обернене включення: $C^{-1}(A \backslash B) \subseteq C^{-1}(A) \backslash C^{-1}(B)$. Оскільки $C^{-1}(A \backslash B) \subseteq C^{-1}(A)$, то достатньо довести, що $C^{-1}(A \backslash B) \cap C^{-1}(B) = \varnothing$. За п. 4 $C^{-1}(A \backslash B) \cap C^{-1}(B) = C^{-1}((A \backslash B) \cap B) = C^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. ◄

4.3. Властивості бієкцій, їх побудова

4.3.1. Означення бієкції

Всюди визначену, функціональну, сюр'єктивну та ін'єктивну відповідність між множинами A і B називають ***бієктивним відображенням***, або ***бієкцією***. Інколи замість терміна "бієкція" використовують термін "***взаємно однозначна відповідність***". Наприклад, відповідність $\{(x, \mathrm{tg}\, x) \mid x \in R\}$ є бієкцією між інтервалом $(-\pi/2; \pi/2)$ і множиною дійсних чисел R.

Взаємно однозначне перетворення множини A (бієкцію між A і A) називають ***підстановкою*** множини A. Прикладом підстановки множини A є діагональ i_A.

З доведених вище тверджень 4.1, 4.2 про двоїстість оберненої відповідності та теореми 4.5 про інваріантність відносно композиції випливають такі наслідки.

Наслідок 4.2. Відповідність C між множинами A і B є взаємно однозначною відповідністю тоді й тільки тоді, коли C є відображенням з A в B і C^{-1} є відображенням з B в A.

Наслідок 4.3. Відповідність C між множинами A і B є взаємно однозначною відповідністю тоді й тільки тоді, коли обернена відповідність C^{-1} взаємно однозначна.

Наслідок 4.4. Якщо C_1 є взаємно однозначною відповідністю між A і B, а C_2 є взаємно однозначною відповідністю між B і F, то відповідність $C_1 \circ C_2$ є взаємно однозначною відповідністю між A і F.

Наслідок 4.5. Для підстановок π_1, π_2 множини A підстановками множини A є $(\pi_1)^{-1}$, $\pi_1\circ\pi_2$.

Враховуючи критерії всюди визначеності, функціональності, сюр'єктивності та ін'єктивності, маємо такий наслідок.

Наслідок 4.6. Відповідність C між множинами A і B є взаємно однозначною відповідністю тоді й тільки тоді, коли $C^{-1}\circ C = i_B$ і $C\circ C^{-1} = i_A$.

4.3.2. Побудова бієкцій

Розглянемо спосіб доведення того, що між множинами A і B існує бієкція.

1. Будуємо певну відповідність φ.

2. Доводимо, що відповідність φ **дійсно є відповідністю** між A і B.

3. Доводимо, що відповідність φ є **бієкцією** між A і B.

Доведення за цією схемою є **конструктивним** – ми будуємо конкретну відповідність. Проте сама по собі конструкція відповідності, підозрілої на бієкцію, не є доведенням, тому необхідні пп. 2 і 3.

УВАГА! Як і раніше, запис $f(x)$, де f – функція й $x\in\mathrm{Pr}_1 f$, позначатиме в цьому підрозділі не одноелементну множину, а саме цей єдиний елемент. Для бієкції f й елемента $y\in \mathrm{Pr}_2 f$ під записом $f^{-1}(y)$ в цьому підрозділі також будемо розуміти не одноелементну множину, а саме цей єдиний елемент.

Приклад 4.4. Довести, що існує бієкція між множинами $A\times B$ і $B\times A$.

► Розглянемо відповідність $\varphi = \{((a, b), (b, a)) \mid a\in A \wedge b\in B\}$. За побудовою φ є відповідністю між $A\times B$ і $B\times A$. Образ кожного елемента (a, b) множини $A\times B$ при відповідності φ є одноелементною множиною. Отже, φ є відображенням з $A\times B$ в $B\times A$. Розглянемо відповідність φ^{-1}. За побудовою $\varphi^{-1} = \{((b, a), (a, b)) \mid a\in A \wedge b\in B\}$. Образ кожного елемента (b, a) множини $B\times A$ при відповідності φ^{-1} є одноелементною множиною. Отже, φ^{-1} є відображенням з $B\times A$ в $A\times B$. За наслідком 4.2 φ є бієкцією між множинами $A\times B$ і $B\times A$. ◄

Приклад 4.5. Довести, що існує бієкція між множинами $(A\times B)^C$ і $A^C\times B^C$.

► Нехай $f\in(A\times B)^C$. Розглянемо відповідності

$h_{f,1} = \{(x, y) \mid x\in C \wedge y = \mathrm{Pr}_1 f(x)\}$, $h_{f,2} = \{(x, y)\mid x\in C \wedge y = \mathrm{Pr}_2 f(x)\}$.

Оскільки f всюди визначена на C, то $h_{f,1}$ і $h_{f,2}$ всюди визначені на C. Оскільки f є функцією, то $h_{f,1}$ і $h_{f,2}$ також функції за побудовою. Отже, $h_{f,1}\in A^C$ і $h_{f,2}\in B^C$.

Розглянемо відповідність $\varphi = \{(f, (h_{f,1}, h_{f,2})) \mid f\in(A\times B)^C\}$. За побудовою відповідність φ є відповідністю між $(A\times B)^C$ і $A^C\times B^C$. Для кожного елемента f множини $(A\times B)^C$ його образ $\{(h_{f,1}, h_{f,2})\}$ при відповідності φ є одноелементною множиною. Отже, φ є відображенням з $(A\times B)^C$ в $A^C\times B^C$.

Доведемо, що відображення φ сюр'єктивне. Нехай $(h_1, h_2)\in A^C\times B^C$, тоді $h_1\in A^C$ і $h_2\in B^C$. Розглянемо відповідність $f = \{(x, (h_1(x), h_2(x))) \mid x\in C\}$, яка за побудовою є відображенням з C в $A\times B$. До того ж $h_{f,1} = h_1$ і $h_{f,2} = h_2$, тобто $\varphi(f) = (h_1, h_2)$. Сюр'єктивність φ доведено.

Доведемо, що відображення φ ін'єктивне. Нехай $(h_1, h_2)\in A^C\times B^C$, і існують такі відображення $f_1, f_2\in(A\times B)^C$, що $\varphi(f_1) = \varphi(f_2) = (h_1,h_2)$. Припустимо, що $f_1 \neq f_2$. Це означає, що для деякого $x\in C$ виконано $f_1(x) \neq f_2(x)$. Тоді $(h_{f_1,1}(x), h_{f_1,2}(x)) \neq (h_{f_2,1}(x), h_{f_2,2}(x))$, звідки $h_{f_1,1}(x) \neq h_{f_2,1}(x)$ або $h_{f_1,2}(x) \neq h_{f_2,2}(x)$, але тоді $h_{f_1,1} \neq h_{f_2,1}$ або $h_{f_1,2} \neq h_{f_2,2}$ і $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$. З отриманої суперечності випливає хибність припущення, тобто необхідно виконано $f_1 = f_2$. Звідси відображення φ є ін'єктивним.

Отже, φ є бієкцією між множинами $(A\times B)^C$ і $A^C\times B^C$. ◄

Приклад 4.6. Довести, що існує бієкція між множинами $A^{B\cup C}$ і $A^B\times A^C$, якщо $B\cap C = \varnothing$.

► Нехай $f\in A^{B\cup C}$. Розглянемо відповідності $h_{f,1} = f|_B$ і $h_{f,2} = f|_C$. За побудовою $f=h_{f,1}\cup h_{f,2}$. $h_{f,1}$ і $h_{f,2}$ є функціями, як і f, оскільки $h_{f,1}\subseteq f$ і $h_{f,2}\subseteq f$. f є всюди визначеною на $B\cup C$ відповідністю, тому відповідність $h_{f,1}$ є всюди визначеною на множині B, а відповідність $h_{f,2}$ – всюди визначеною на множині C. Отже, $h_{f,1}\in A^B$ і $h_{f,2}\in A^C$.

Розглянемо відповідність $\varphi = \{(f, (h_{f,1}, h_{f,2})) \mid f\in A^{B\cup C}\}$. За побудовою φ є відповідністю між $A^{B\cup C}$ і $A^B\times A^C$. Образ $\{(h_{f,1}, h_{f,2})\}$ кожного елемента f множини $A^{B\cup C}$ при відповідності φ є одноелементною множиною. Отже, φ є відображенням з $A^{B\cup C}$ в $A^B\times A^C$.

Доведемо, що відображення φ сюр'єктивне. Нехай $(h_1, h_2)\in A^B\times A^C$, тоді $h_1\in A^B$ і $h_2\in A^C$. Розглянемо відповідність $f = h_1\cup h_2$, яка за побудовою є відповідністю між $B\cup C$ і A. Оскільки h_1 всюди визначена на B, а h_2 всюди визначена на C, їх об'єднання є всюди визначеною відповідністю між $B\cup C$ і A. Оскільки $B\cap C = \varnothing$, то f є функцією. Отже, $f\in A^{B\cup C}$. До того ж $h_{f,1} = h_1$ і $h_{f,2} = h_2$, тобто $\varphi(f) = (h_1, h_2)$. Сюр'єктивність φ доведено.

Доведемо, що відображення φ ін'єктивне. Нехай $(h_1, h_2)\in A^B\times A^C$, і існують такі відображення $f_1, f_2\in A^{B\cup C}$, що $\varphi(f_1) = \varphi(f_2) = (h_1, h_2)$. Припустимо, що $f_1 \neq f_2$. Це означає, що за деякого $x\in B\cup C$ виконано $f_1(x) \neq f_2(x)$. Тоді $(h_{f_1,1}(x), h_{f_1,2}(x)) \neq (h_{f_2,1}(x), h_{f_2,2}(x))$, звідки $h_{f_1,1}(x) \neq h_{f_2,1}(x)$ або $h_{f_1,2}(x) \neq h_{f_2,2}(x)$, але тоді $h_{f_1,1} \neq h_{f_2,1}$ або $h_{f_1,2} \neq h_{f_2,2}$ і в обох випадках $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$. З отриманої суперечності випливає хибність припущення, тобто необхідно виконано $f_1 = f_2$. Звідси відображення φ є ін'єктивним.

Отже, φ – бієкція між множинами $A^{B\cup C}$ і $A^B\times A^C$. ◄

Приклад 4.7. Відомо, що існують бієкції між множинами A і C та між множинами B і D. Довести, що існує бієкція між множинами $A\times B$ і $C\times D$.

► Нехай f і h – бієкції між A і C та між B і D відповідно. Розглянемо відповідність $\varphi = \{((a, b), (f(a), h(b))) \mid a\in A \wedge b\in B\}$ між $A\times B$ і $C\times D$. Оскільки f і h є відображеннями, то φ за побудовою є всюди визначеною й функціональною, отже є відображенням з $A\times B$ в $C\times D$.

Відповідність φ^{-1},

$$\varphi^{-1} = \{((f(a), h(b)), (a, b)) \mid a\in A \wedge b\in B\} =$$
$$= \{((c, d), (f^{-1}(c), h^{-1}(d)) \mid c\in C \wedge d\in D\},$$

є відображенням з $C\times D$ в $A\times B$, оскільки f і h є бієкціями. За наслідком 4.2 φ є бієкцією між $A\times B$ і $C\times D$. ◄

Приклад 4.8. Відомо, що існують бієкції між множинами A і C та між множинами B і D. Довести, що існує бієкція між множинами A^B і C^D.

► Нехай f і h є бієкціями, відповідно, між A і C та між B і D. Розглянемо відповідність $\varphi = \{((g, h^{-1}\circ g\circ f) \mid g\in A^B\}$. h є бієкцією між B і D, тому h^{-1} є відображенням з D на B, а тоді $h^{-1}\circ g\circ f$ є відображенням з D в C, тобто $h^{-1}\circ g\circ f\in C^D$. Оскільки за фіксованих f і h відповідність φ кожному елементу з A^B ставить у відповідність єдиний елемент з C^D, то φ є відображенням з A^B в C^D.

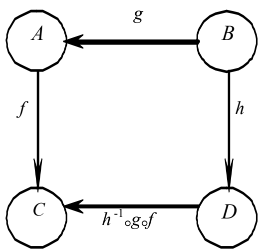

Рис. .4.1. Діаграма до прикладу 4.8

Якщо $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ при g_1, $g_2\in A^B$, то $h^{-1}\circ g_1\circ f = h^{-1}\circ g_2\circ f$. Оскільки h і f всюди визначені та ін'єктивні, $h\circ h^{-1} = i_B$, $f\circ f^{-1} = i_A$. Тоді

$g_1 = i_B\circ g_1\circ i_A = h\circ h^{-1}\circ g_1\circ f\circ f^{-1} = h\circ h^{-1}\circ g_2\circ f\circ f^{-1} = i_B\circ g_2\circ i_A = g_2$.

Отже, відповідність φ ін'єктивна.

Для довільного елемента $g'\in C^D$ розглянемо відповідність $h\circ g'\circ f^{-1}$. Оскільки h і f є бієкціями, а g' – відображенням, то маємо $h\circ g'\circ f^{-1}\in A^B$. Крім того, за наслідком 4.6 $h^{-1}\circ h\circ g'\circ f^{-1}\circ f = g'$, звідки $\varphi(h\circ g'\circ f^{-1}) = g'$. Отже, відповідність φ є сюр'єктивною й за доведеним вище бієкцією між A^B і C^D. ◄

Приклад 4.9. Довести, що існує бієкція між множинами $P(M)$ і $\{0, 1\}^M$.

► Розглянемо відповідність $\varphi = \{(A, \chi_A{}^M) \mid A\in P(M)\}$. Характеристична функція $\chi_A{}^M$ множини A є відображенням з A в $\{0, 1\}$, тому φ є відповідністю між $P(M)$ і $\{0, 1\}^M$. Оскільки для кожної множини $A\in P(M)$ її характеристична функція визначена, причому однозначно, то φ є відображенням з $P(M)$ в $\{0, 1\}^M$.

Нехай $\chi\in\{0, 1\}^M$. Розглянемо множину $A(\chi) = \{x \mid \chi(x) = 1\}$; для неї $\chi_{A(\chi)}{}^M = \chi$. Отже, для кожної функції $\chi\in\{0, 1\}^M$ знайдеться множина $A(\chi)$ така, що $(A(\chi), \chi)\in\varphi$, а тоді φ є сюр'єктивною.

Припустимо, що одна й та сама характеристична функція відповідає множинам A_1 і A_2, тобто $\chi_{A_1}{}^M = \chi_{A_2}{}^M$. Тоді

$x\in A_1 \Leftrightarrow \chi_{A_1}{}^M(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_{A_2}{}^M(x) = 1 \Leftrightarrow x\in A_2$,

звідки $A_1 = A_2$. Отже, відповідність φ є ін'єктивною. Тоді φ є бієкцією як сюр'єктивне та ін'єктивне відображення. ◄

Приклад 4.10. Довести, що існує бієкція між множинами N і $N\times N$.

► Розташуємо пари натуральних чисел на цілочисельній сітці та рухатимемося її діагоналями (рис. 4.2). Номер 0 надамо парі (0, 0), 1 – (0, 1), 2 – (1, 0), 3 – (0, 2), 4 – (1, 1), 5 – (2, 0) тощо. Ця нумерація пар натуральних чисел була запропонована Кантором і називається ***канторовою***. Неважко переконатися, що вона дійсно є бієкцією між $N\times N$ і N. Аналітично обернену до неї функцію задає ***функція Кантора***

$c(x, y) = [(x+y)(x+y+1)/2]+x$. ◄

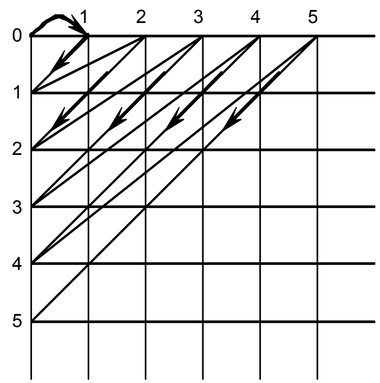

Рис. 4.2. Обхід пар натуральних чисел при побудові канторової нумерації

Задачі

4.1. Нехай задано такі відповідності між R і R:

$C_1 = \{(x, y) \mid ||x|-|y|| = 1\}$;

$C_2 = \{(x, y) \mid y^2-x^2 = 1\}$;

$C_3 = \{(x, y) \mid y = 2x-1\}$;

$C_4 = \{(x, y) \mid \exists n\in Z\ y = x^n\}$.

Визначити, які з цих відповідностей є:

а) всюди визначеними; в) ін'єктивними;

б) функціональними; г) сюр'єктивними.

4.2. Нехай C_1 і C_2 – всюди визначені відповідності між A і B. Чи є всюди визначеною відповідність:

а) $C_1\cup C_2$; в) $C_1\setminus C_2$;

б) $C_1\cap C_2$; г) $C_1\div C_2$?

4.3. Нехай C_1 і C_2 – сюр'єктивні відповідності між A і В. Чи є сюр'єктивною відповідність:

а) $C_1\cup C_2$; в) $C_1\setminus C_2$;

б) $C_1\cap C_2$; г) $C_1\div C_2$?

4.4. Нехай C_1 і C_2 – функціональні відповідності між A і B. Чи є функціональною відповідність:

а) $C_1 \cup C_2$; в) $C_1 \setminus C_2$;

б) $C_1 \cap C_2$; г) $C_1 \div C_2$?

4.5. Нехай C_1 і C_2 – ін'єктивні відповідності між A і B. Чи є ін'єктивною відповідність:

а) $C_1 \cup C_2$; в) $C_1 \setminus C_2$;

б) $C_1 \cap C_2$; г) $C_1 \div C_2$?

4.6. Нехай f_1 і f_2 – функціональні відповідності й $\mathrm{Pr}_1(f_1) \cap \mathrm{Pr}_1(f_2) = \varnothing$. Довести, що $f_1 \cup f_2$ – функціональна відповідність.

4.7. Довести, що об'єднання $f_1 \cup f_2$ двох відображень f_1 і f_2 з A в B є відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f_1 = f_2$.

4.8. Довести, що перетин $f_1 \cap f_2$ двох відображень f_1 і f_2 з A в B є відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f_1 = f_2$.

4.9. Довести, що різниця $f_1 \setminus f_2$ двох відображень f_1 і f_2 з A в B є відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f_1 \cap f_2 = \varnothing$.

4.10. Довести, що для відображень f_1 і f_2 з A ($A \neq \varnothing$) в B відповідність $f_1 \div f_2$ не є відображенням.

4.11. Побудувати приклади відповідностей C_1 між A і B та C_2 між B і F таких, що:

а) $C_1 \circ C_2$ – всюди визначена відповідність (між A і F), а C_2 – ні;

б) $C_1 \circ C_2$ – фунціональна відповідність, а C_1 і C_2 – ні;

в) $C_1 \circ C_2$ – відображення, а C_1 і C_2 – ні;

г) $C_1 \circ C_2$ – сюр'єктивна відповідність (між A і F), а C_1 – ні;

д) $C_1 \circ C_2$ – ін'єктивна відповідність, а C_1 і C_2 – ні.

4.12.Нехай $C_1 \subseteq A \times B$, $C_2 \subseteq B \times F$, $C_1 \circ C_2$ – всюди визначена відповідність між A і F. Довести, що C_1 є всюди визначеною відповідністю між A і B.

4.13. Нехай $C_1 \subseteq A \times B$, $C_2 \subseteq B \times F$, $C_1 \circ C_2$ – сюр'єктивна відповідність між A і F. Довести, що C_2 є сюр'єктивною відповідністю між B і F.

4.14. Нехай $C_1 \subseteq A \times B$, $C_2 \subseteq B \times F$, $C_1 \circ C_2$ – функціональна відповідність, C_1 – сюр'єктивна. Довести, що C_2 – функціональна відповідність.

4.15. Нехай $C_1 \subseteq A \times B$, $C_2 \subseteq B \times F$, $C_1 \circ C_2$ – ін'єктивна відповідність, а C_2 – всюди визначена на B. Довести, що C_1 – ін'єктивна відповідність.

4.16. Довести, що для довільної функції f з A в B композиція $f^{-1} \circ f$ є функцією.

4.17. Довести, що для відповідності f композиція $f \circ f^{-1}$ є функцією тоді й тільки тоді, коли f є ін'єкцією.

4.18. Довести, що для відповідності f композиція $f^{-1} \circ f$ є функцією тоді й тільки тоді, коли f є функцією.

4.19. Довести, що відповідність C є функціональною тоді й тільки тоді, коли для довільних множин A, B має місце рівність $C^{-1}(A \cap B) = C^{-1}(A) \cap C^{-1}(B)$.

4.20. Довести, що відповідність C є ін'єктивною тоді й тільки тоді, коли для довільних множин A, B має місце рівність $C(A \cap B) = C(A) \cap C(B)$.

4.21. Довести, що відповідність C є функціональною тоді й тільки тоді, коли для довільних множин A, B має місце рівність $C^{-1}(A \setminus B) = C^{-1}(A) \setminus C^{-1}(B)$.

4.22. Довести, що відповідність C є ін'єктивною тоді й тільки тоді, коли за довільних множин A, B має місце рівність $C(A \setminus B) = C(A) \setminus C(B)$.

4.23. Довести, що відповідність C є функціональною тоді й тільки тоді, коли для довільних множин A, B має місце рівність $C^{-1}(A \div B) = C^{-1}(A) \div C^{-1}(B)$.

4.24. Довести, що відповідність C є ін'єктивною тоді й тільки тоді, коли для довільних множин A, B має місце рівність $C(A \div B) = C(A) \div C(B)$.

4.25. Довести, що відповідність C є функціональною тоді й тільки тоді, коли для довільної множини $B \subseteq \mathrm{Pr}_2(C)$ має місце рівність $B = C(C^{-1}(B))$.

4.26. Довести, що відповідність C є ін'єктивною тоді й тільки тоді, коли для довільної множини $A \subseteq \mathrm{Pr}_1(C)$ має місце рівність $A = C^{-1}(C(A))$.

4.27. Довести, що якщо для довільних множин $A, B \subseteq \mathrm{Pr}_2(C)$ із $C^{-1}(A) \subseteq C^{-1}(B)$ випливає $A \subseteq B$, то відповідність C може не бути функціональною.

4.28. Довести, що якщо для довільних множин A, $B \subseteq \mathrm{Pr}_2(C)$ з $C(A) \subseteq C(B)$ випливає $A \subseteq B$, то відповідність C може не бути ін'єктивною.

4.29**. Нехай C – непорожня відповідність. Довести, що якщо за довільних множин A, $B \subseteq \mathrm{Pr}_2(C)$ з $C^{-1}(A) \subseteq C^{-1}(B)$ випливає $A \subseteq B$, то існує хоча б один $x \in \mathrm{Pr}_1(C)$ такий, що множина $C(x)$ містить рівно один елемент.

4.30. Довести, що існує біекція між множинами $A \times (B \times C)$ і $(A \times B) \times C$.

4.31. Довести, що існує біекція між множинами A^k і $A^{\overline{1,k}}$.

4.32. Довести, що існує біекція між множинами $(A^B)^C$ і $A^{B \times C}$.

4.33. Довести, що існує біекція між множинами $\prod_{i \in I} A_i$ і $\prod_{i \in I} A_{\varphi(i)}$, де φ – підстановка множини I.

4.34. Довести, що існує біекція між множинами A^B і $\prod_{i \in I} A^{C_i}$, де $\{C_i\}_{i \in I}$ – розбиття множини B.

4.35. Довести, що якщо існують ін'єктивні відображення з A в C та з B в D, то існує ін'єктивне відображення з $A \times B$ в $C \times D$.

4.36. Довести, що якщо існують ін'єктивні відображення з A в C та з B в D, причому $C \neq \varnothing$, то існує ін'єктивне відображення з A^B в C^D.

4.37. Відомо, що існують бієкції між множинами A і C та між множинами B і D, причому $A \cap B = \varnothing$ і $C \cap D = \varnothing$. Довести, що існує бієкція між множинами $A \cup B$ і $C \cup D$.

4.38. Відомо, що існують ін'єктивні відображення з A в C та з B в D, причому $C \cap D = \varnothing$. Довести, що існує ін'єктивне відображення з $A \cup B$ в $C \cup D$.

4.39. Аналітично задати канторову нумерацію c^{-1}(див. приклад 4.10).

ГЛАВА 5. Відношення

5.1. Відношення

Нехай задано множини A_1, A_2, …, A_n ($n \in N_+$). Довільна підмножина декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається ***відношенням***, заданим, або визначеним на множинах A_1, A_2, …, A_n. При $n = 2$ відношення є відповідністю між множинами A_1 і A_2. Якщо $A_i = A$ для всіх $i \in \overline{1,n}$, то відношення R, задане на множинах A_1, A_2, …, A_n називається n-арним ***відношенням на множині*** A. Якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$, то кажуть, що елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***знаходяться у відношенні*** R. При $n = 1$ відношення називається ***унарним***, при $n = 2$ ***бінарним***, при $n = 3$ ***тернарним***.

Унарне відношення задає певну характеристичну властивість елементів, наприклад, унарні відношення на множині натуральних чисел: "є простим числом", "є квадратом натурального числа".

Прикладами бінарних відношень є такі відношення на множині натуральних чисел: "ділиться на", "дорівнює", "більше", "менше або дорівнює", "є взаємно простими"; відношеннями на множині всіх підмножин деякої множини U є "включає", "дорівнює". У математиці найчастіше зустрічаються бінарні відношення, тому далі будемо розглядати саме їх, розуміючи під терміном "відношення" саме бінарне відношення.

Нехай R – відношення на множині A, $R \subseteq A \times A$. Той факт, що елементи a і b знаходяться у відношенні R, тобто $(a, b) \in R$, ще позначають як $a R b$. Відповідність i_A, розглянута вище, є відношенням на A; її ще називають ***відношенням тотожності***.

Відношення можна задати так само, як і будь-яку іншу множину. Проте відношення на множині A є множиною пар елементів з множини A, тому для його задання ще можна скористатися ***діаграмою*** відношення. Нарисуємо точки та позначимо їх елементами множини A. З точки a проведемо стрілку в точку b тоді й тільки тоді, коли $(a, b) \in R$. Так, на рис. 5.1 наведено діаграму відношення $R_0 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 4)\}$ на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

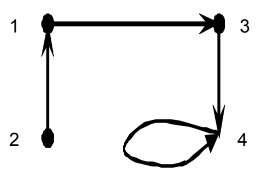

Рис. 5.1. Діаграма відношення

Відношення на **с к і н ч е н н і й** множині можна задати матрицею. Пронумеруємо елементи множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ числами від 1 до n.

Матриця A_R відношення R – це квадратна матриця розміром $n \times n$, $A_R = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$; якщо $a_i R a_j$, то $a_{i,j} = 1$, інакше $a_{i,j} = 0$. Так, відношенню R_0 відповідає матриця

$$A_{R_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай R – відношення на множині A і $B \subseteq A$. Тоді відношення $R|_B = R \cap (B \times B)$ є ***звуженням*** відношення R на множину B.

Застосування до відношень на множині A теоретико-множинних операцій, а також обернення, доповнення (до $A \times A$) та композиції дає відношення на A. Отже, множина всіх відношень на A замкнена відносно цих операцій.

Відношення є окремим випадком відповідності. Теореми глави 3, сформульовані та доведені для відповідностей, можна майже дослівно перенести на відношення. Проте відношення мають специфічні властивості; саме їх ми будемо вивчати надалі.

5.2. Властивості відношень

5.2.1. Базові властивості відношень

Відношення R на множині A називається:

1) ***рефлексивним***, якщо $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$;

2) ***антирефлексивним*** (або ***іррефлексивним***), якщо $a \in A \Rightarrow (a, a) \notin R$;

3) ***симетричним***, якщо $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$;

4) ***антисиметричним***, якщо $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$;

5) ***транзитивним***, якщо $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Так, серед відношень $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2)\}$, $R_2 = \{(2, 1), (1, 3), (4, 4)\}$, $R_3 = \{(1, 2), (3, 4)\}$, $R_4 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$, $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$[19] на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ відношення R_1 є рефлексивним, R_3 –антирефлексивним, R_4 – симетричним, R_1, R_2, R_3 – антисиметричними, R_1, R_3 – транзитивними; відношення R_5 не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним, ні симетричним, ні антисиметричним, ні транзитивним.

Зауваження. Якщо немає **р і з н и х** елементів a, b множини A, при яких $(a, b) \in R$, то відношення R за означенням є симетричним. Якщо немає **р і з н и х** елементів a, b множини A, при яких одночасно $(a, b) \in R$ і $(b, a) \in R$, то відношення R за означенням є антисиметричним. Аналогічно, якщо немає таких елементів a, b, c множини A, при яких одночасно $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, то відношення R за означенням є транзитивним.

[19] Радимо читачу нарисувати їх діаграми.

Розглянемо матрицю A_R відношення R на скінченній n-елементній множині. Матриця рефлексивного відношення має на головній діагоналі тільки одиниці, антирефлексивного – тільки нулі. Матриця симетричного відношення є симетричною відносно головної діагоналі.

Зауваження. Означення симетричності відношення еквівалентно такому: відношення R на множині A називається ***симетричним***, якщо $(a, b)\in R \Leftrightarrow (b, a)\in R$. Дійсно, якщо відношення є симетричним за новим означенням, то воно є симетричним і за першим означенням. Якщо відношення є симетричним за першим означенням, то виконується $(a, b)\in R \Rightarrow (b, a)\in R$. Але це має місце для довільних a і b, тому $(b, a)\in R \Rightarrow (a, b)\in R$. Отже, $(a, b)\in R \Leftrightarrow (b, a)\in R$.

Теорема 5.1. Критерії властивостей для відношень.

Нехай R – відношення на множині A. Тоді:

1) R рефлексивне (на множині A) $\Leftrightarrow i_A \subseteq R$;

2) R антирефлексивне $\Leftrightarrow i_A \cap R = \varnothing$;

3) R симетричне $\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1} \Leftrightarrow R = R^{-1}$;

4) R антисиметричне $\Leftrightarrow R\cap R^{-1}\subseteq i_A$;

5) R транзитивне $\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R$.

► Доведення пп. 1–3 випливає з відповідних означень.

4) $(\Rightarrow)$ $(a, b)\in R\cap R^{-1} \Leftrightarrow (a, b)\in R \wedge (a, b)\in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b)\in R \wedge$
$\wedge (b, a)\in R \Rightarrow^{(R \text{ антисиметричне})} (a, b)\in R \wedge a=b \Rightarrow a\in A \wedge a=b \Leftrightarrow (a, b)\in i_A$;

$(\Leftarrow)$ $(a, b)\in R \wedge (b, a)\in R \Leftrightarrow (a, b)\in R \wedge (a, b)\in R^{-1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a, b)\in R\cap R^{-1} \Rightarrow^{(R\cap R^{-1}\subseteq i_A)} (a, b)\in i_A \Rightarrow a=b$;

5) $(\Rightarrow)$ $(a, c)\in R\circ R \Leftrightarrow \exists b\ ((a, b)\in R \wedge (b, c)\in R) \Rightarrow^{(R \text{ транзитивне})}$
$\Rightarrow \exists b\ (a, c)\in R \Leftrightarrow (a, c)\in R$.

$(\Leftarrow)$ $(a, b)\in R \wedge (b, c)\in R \Rightarrow (a, c)\in R\circ R \Rightarrow^{(R\circ R\subseteq R)} (a, c)\in R$. ◄

Критеріями з теореми 5.1 будемо користуватися для доведення властивостей відношень.

Зауваження. Кожне рефлексивне відношення на множині A включає діагональ i_A, яка є рефлексивним відношенням, тому i_A є найменшим (за включенням) рефлексивним відношенням на A. Окрім того, i_A є симетричним, антисиметричним та транзитивним відношенням одночасно.

Наслідок 5.1. Якщо R_1 і R_2 – відношення на множині A, причому $R_1\subseteq R_2$ і відношення R_1 є рефлексивним, то відношення R_2 – рефлексивне.

► За критерієм рефлексивності $i_A \subseteq R_1$, тоді $i_A \subseteq R_1\subseteq R_2$. ◄

Наслідок 5.2. Якщо R_1 і R_2 – відношення на множині A, причому $R_1\subseteq R_2$ і відношення R_2 є антисиметричним, то відношення R_1 – антисиметричне.

► За критерієм антисиметричності $R_2\cap R_2^{-1}\subseteq i_A$, тоді $R_1\cap R_1^{-1}\subseteq R_2\cap R_2^{-1}\subseteq i_A$. ◄

5.2.2. Інваріантність типів відношень відносно теоретико-множинних операцій

Теорема 5.2 про рефлексивні відношення. Якщо R_1, R_2 – рефлексивні відношення на множині A, то:

1) $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, R_1^{-1}, $R_1\circ R_2$ є рефлексивними відношеннями на множині A;

2) $R_1\backslash R_2$ є антирефлексивним відношеннями на множині A.

► За критерієм рефлексивності $i_A\subseteq R_1$ і $i_A\subseteq R_2$. Тоді $i_A\subseteq R_1\cup R_2$, $i_A = i_A^{-1}\subseteq R_1^{-1}$, $i_A = i_A\circ i_A\subseteq((R_1\backslash i_A)\cup i_A)\circ((R_2\backslash i_A)\cup i_A) = R_1\circ R_2$. Отже, $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, R_1^{-1}, $R_1\circ R_2$ є рефлексивними відношеннями на множині A.

З іншого боку, з $i_A\subseteq R_1$ і $i_A\subseteq R_2$ отримуємо $i_A\cap(R_1\backslash R_2) = \varnothing$. За критерієм $R_1\backslash R_2$ є антирефлексивним відношенням на множині A. ◄

Наслідок 5.3. Якщо R_1, R_2 – відношення на множині A, причому відношення R_1 є рефлексивним, то $R_1\cup R_2$ є рефлексивним відношенням на множині A.

Наслідок 5.4. Якщо $\{R_i\}_{i\in I}$ – сім′я рефлексивних відношень на множині A, то $\bigcup\limits_{i\in I} R_i$, $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ є рефлексивними відношеннями на множині A.

Теорема 5.3 про антирефлексивні відношення. Якщо R_1, R_2 – антирефлексивні відношення на множині A, то $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, $R_1\backslash R_2$, R_1^{-1} є антирефлексивними відношеннями на множині A.

► За критерієм антирефлексивності $i_A\cap R_1 = i_A\cap R_2 = \varnothing$, тоді

$i_A\cap(R_1\cup R_2) = (i_A\cap R_1)\cup(i_A\cap R_2) = \varnothing$,

$i_A\cap(R_1\cap R_2) = (i_A\cap R_1)\cap R_2 = \varnothing\cap R_2 = \varnothing$,

$i_A\cap(R_1\backslash R_2) = (i_A\cap R_1)\backslash R_2 = \varnothing\backslash R_2 = \varnothing$.

Крім того, $i_A\cap R_1^{-1} = i_A^{-1}\cap R_1^{-1} = (i_A\cap R_1)^{-1} = \varnothing^{-1} = \varnothing$. Отже, за критерієм всі вказані відношення є антирефлексивними. ◄

Наслідок 5.5. Якщо $\{R_i\}_{i\in I}$ – сім′я антирефлексивних відношень на множині A, то $\bigcup\limits_{i\in I} R_i$, $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ є антирефлексивними відношеннями на множині A.

Зауваження. Композиція антирефлексивних відношень може не бути антирефлексивним відношенням. Наприклад, якщо $A = \{1, 2\}$, $R_1 = \{(1, 2)\}$, $R_2 = \{(2, 1)\}$, то $R_1\circ R_2 = \{(1, 1)\}$. R_1 і R_2 є рефлексивними на множині A, проте $R_1\circ R_2$ – ні.

Теорема 5.4 про симетричні відношення. Якщо R_1, R_2 – симетричні відношення на множині A, то $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, $R_1\backslash R_2$, R_1^{-1} є симетричними відношеннями на множині A.

► З симетричності відношень R_1 і R_2 отримуємо $R_1 = R_1^{-1}$, $R_2 = R_2^{-1}$. $(R_1\cup R_2)^{-1} = R_1^{-1}\cup R_2^{-1} = R_1\cup R_2$, аналогічно встановлюється $(R_1\cap R_2)^{-1} = R_1\cap R_2$, $(R_1\backslash R_2)^{-1} = R_1\backslash R_2$. Отже, указані відношення є симетричними за критерієм. ◄

Наслідок 5.6. Якщо $\{R_i\}_{i\in I}$ – сім′я симетричних відношень на множині A, то $\bigcup\limits_{i\in I} R_i$, $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ є симетричними відношеннями на множині A.

Зауваження. Композиція симетричних відношень може не бути симетричним відношенням. Наприклад, якщо $A = \{1, 2\}$, $R_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$,

$R_2 = \{(2, 2)\}$, то $R_1 \circ R_2 = \{(1, 2)\}$. R_1 і R_2 – симетричні відношення на множині A, проте $R_1 \circ R_2$ – ні.

Теорема 5.5 про антисиметричні відношення. Якщо R_1, R_2 – антисиметричні відношення на множині A, то $R_1 \cap R_2$, $R_1 \backslash R_2$, R_1^{-1} є антисиметричними відношеннями на множині A.

► З антисиметричності відношень R_1 і R_2 отримуємо $R_1 \cap R_1^{-1} \subseteq i_A$, $R_2 \cap R_2^{-1} \subseteq i_A$. Тоді

$(R_1 \cap R_2) \cap (R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1 \cap R_2 \cap R_1^{-1} \cap R_2^{-1} =$

$= (R_1 \cap R_1^{-1}) \cap (R_2 \cap R_2^{-1}) \subseteq i_A \cap i_A = i_A$,

$(R_1 \backslash R_2) \cap (R_1 \backslash R_2)^{-1} \subseteq R_1 \cap R_1^{-1} \subseteq i_A$, $R_1^{-1} \cap (R_1^{-1})^{-1} = R_1^{-1} \cap R_1 \subseteq i_A$.

Указані відношення є антисиметричними за критерієм. ◄

Зауваження. Об'єднання антисиметричних відношень може не бути антисиметричним відношенням. Наприклад, якщо $A = \{1, 2\}$, $R_1 = \{(1, 2)\}$, $R_2 = \{(2, 1)\}$, то $R_1 \cup R_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$. R_1 і R_2 – антисиметричні відношення на множині A, проте $R_1 \circ R_2$ – ні.

Зауваження. Композиція антисиметричних відношень може не бути антисиметричним відношенням. Наприклад, якщо $A = \{1, 2\}$, $R_1 = \{(1, 2), (2, 2)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$, то $R_1 \circ R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. R_1 і R_2 – антисиметричні відношення на множині A, проте $R_1 \circ R_2$ – ні.

Теорема 5.6 про транзитивні відношення. Якщо R_1, R_2 – транзитивні відношення на множині A, то $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1} є транзитивними відношеннями на множині A.

► За критерієм транзитивності, $R_1 \circ R_1 \subseteq R_1$, $R_2 \circ R_2 \subseteq R_2$. Тоді

$(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2) = (R_1 \circ R_1) \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_1) \cap (R_2 \circ R_2) \subseteq$

$\subseteq (R_1 \circ R_1) \cap (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \cap R_2$, $(R_1^{-1}) \circ (R_1^{-1}) = \circ (R_1 \circ R_1)^{-1} \subseteq R_1^{-1}$.

Отже, за критерієм $R_1 \cap R_2$ та R_1^{-1} також є транзитивними. ◄

Зауваження. Об'єднання транзитивних відношень може не бути транзитивним відношенням. Наприклад, якщо $A = \{1, 2\}$, $R_1 = \{(1, 2)\}$, $R_2 = \{(2, 1)\}$, то $R_1 \cup R_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$. R_1 і R_2 – транзитивні відношення на множині A, проте $R_1 \cup R_2$ – ні.

Зауваження. Композиція транзитивних відношень може не бути транзитивним відношенням. Наприклад, якщо $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R_1 = \{(1, 1), (2, 4)\}$, $R_2 = \{(1, 2), (4, 3)\}$, то $R_1 \circ R_2 = \{(1, 2), (2, 3)\}$. R_1 і R_2 – транзитивні відношення на множині A, проте $R_1 \circ R_2$ – ні.

5.3. Замикання відношень

Нехай R є відношенням на множині A, тобто $R \subseteq A \times A$. Відношення $R^{(n)}$ ($n \in N$) означимо індуктивно:

$$R^{(0)} = i_A;$$

$$R^{(n+1)} = R^{(n)} \circ R,\ n \in N.$$

Оскільки композиція відповідностей (а отже і відношень) є асоціативною, відношення $R^{(n)}$ можна подати у вигляді $R^{(0)} = i_A$, $R^{(1)} = R$, $R^{(n)} = R \circ R \circ \ldots \circ R$ (n входжень літери R, $n \geq 2$). Це неформально обґрунтовує істинність наступного твердження.

Твердження 5.1. Для довільного відношення R на множині A і довільних натуральних чисел n, m справджуються рівності $R^{(n)} \circ R^{(m)} = R^{(n+m)} = R^{(m)} \circ R^{(n)}$.

► Індукцією за $n+m$ доведемо, що $R^{(n)} \circ R^{(m)} = R^{(n+m)}$.

База індукції. $n+m = 0$, тоді $n = 0$, $m = 0$ і $R^{(0)} \circ R^{(0)} = i_A \circ i_A = i_A = R^{(0)}$.

Крок індукції. Припустимо, що твердження доведено для всіх натуральних n, m, за яких $n+m = t$. Нехай $n+m = t+1$. При $m = 0$ за властивостями діагоналі $R^{(n)} \circ R^{(0)} = R^{(n)} \circ i_A = R^{(n+m)}$. Якщо $m>0$, то $n+m-1 = t$; з використанням припущення індукції маємо

$R^{(n)} \circ R^{(m)} = R^{(n)} \circ (R^{(m-1)} \circ R^{(1)}) = (R^{(n)} \circ R^{(m-1)}) \circ R^{(1)} = R^{(n+m-1)} \circ R^{(1)} = R^{(n+m)}$.

Згідно з принципом математичної індукції, $R^{(n)} \circ R^{(m)} = R^{(n+m)}$ за всіх $n, m \in N$. Рівність $R^{(n+m)} = R^{(m)} \circ R^{(n)}$ випливає з вищедоведеної. ◄

Твердження 5.2. Для довільних відношень R_1 і R_2 таких, що $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$, і довільного натурального числа n виконується $R_1^{(n)} \subseteq R_2^{(n)}$.

► Скористаємось індукцією за n. Якщо $n = 0$, то $R_1^{(0)} = i_A \subseteq i_A = R_2^{(0)}$. Припустимо, що $R_1^{(n)} \subseteq R_2^{(n)}$. Тоді $R_1^{(n+1)} = R_1^{(n)} \circ R_1 \subseteq R_2^{(n)} \circ R_2 = R_2^{(n+1)}$. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено. ◄

Твердження 5.3. Якщо відношення R є рефлексивним на множині A, то відношення $R^{(n)}$, де $n \in N$, також є рефлексивним на множині A.

► Доведемо це індукцією за n. Якщо $n = 0$, то $R^{(0)} = i_A$ – рефлексивне на A відношення. Доведемо, що з рефлексивності на множині A відношення $R^{(n)}$ випливає рефлексивність на множині A відошення $R^{(n+1)}$. Оскільки $R^{(n+1)} = R^{(n)} \circ R$, то за припущенням індукції $i_A \subseteq (i_A \cup R^{(n)}) \circ (i_A \cup R) = R^{(n)} \circ R = R^{(n+1)}$. Отже, $R^{(n+1)}$ рефлексивне. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено. ◄

Твердження 5.4. Якщо відношення R на множині A симетричне, то відношення $R^{(n)}$, де $n \in N$, є симетричним.

► Скористаємося індукцією за n. Якщо $n = 0$, то $R^{(0)} = i_A$ – симетричне відношення. Припустимо, що відношення $R^{(n)}$ є симетричним. Доведемо, що відношення $R^{(n+1)}$ також симетричне. $R^{(n+1)} = R^{(n)} \circ R$, звідси $(R^{(n+1)})^{-1} = (R^{(n)} \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ (R^{(n)})^{-1}$. Відношення $R^{(n)}$ і R симетричні, тому $R^{(n)} = (R^{(n)})^{-1}$ і $R = R^{-1}$. Тоді $(R^{(n+1)})^{-1} = R \circ R^{(n)} = R^{(n+1)}$. Звідси відношення $R^{(n+1)}$ є симетричним. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено. ◄

Твердження 5.5. Якщо відношення R на множині A транзитивне, то відношення $R^{(n)}$, де $n \in N$, є транзитивним.

► Скористаємось індукцією за n. Якщо $n = 0$, то $R^{(0)} = i_A$ – транзитивне відношення. Припустивши, що відношення $R^{(n)}$ є транзитивним, доведемо транзитивність $R^{(n+1)}$. Використовуючи властивості $R^{(n)}$, маємо

$R^{(n+1)} \circ R^{(n+1)} = (R^{(n)} \circ R) \circ (R^{(n)} \circ R) = R^{(n)} \circ R \circ R^{(n)} \circ R = (R^{(n)} \circ R^{(n)}) \circ (R \circ R)$.

Відношення $R^{(n)}$ і R транзитивні, тому $R^{(n)} \circ R^{(n)} \subseteq R^{(n)}$ і $R \circ R \subseteq R$. Тоді $R^{(n+1)} \circ R^{(n+1)} \subseteq R^{(n)} \circ R = R^{(n+1)}$, тому відношення $R^{(n+1)}$ є транзитивним. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено. ◄

Твердження 5.6. Якщо відношення R на множині A транзитивне, то $R^{(n)} \subseteq R$, де $n \in N_+$.

► R транзитивне, тому $R\circ R\subseteq R$. Далі скористаємося індукцією за n. Якщо $n = 1$, то $R^{(1)} = R\subseteq R$. Припустимо, що $R^{(n)}\subseteq R$. Тоді $R^{(n+1)} = R^{(n)}\circ R\subseteq R\circ R\subseteq R$. Звідси $R^{(n+1)}\subseteq R$. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено. ◄

Нехай R – відношення на множині A, $R\subseteq A\times A$. ***Транзитивним замиканням*** відношення R називають відношення $R^{(1)}\cup R^{(2)}\cup\ldots = \bigcup\limits_{n\in N_+} R^{(n)}$, яке позначають R^+. ***Рефлексивно-транзитивним замиканням*** відношення R називають відношення $R^* = i_A\cup R^+ = R^{(0)}\cup R^{(1)}\cup R^{(2)}\cup\ldots = \bigcup\limits_{n\in N} R^{(n)}$. Безпосередньо з означень і дистрибутивності композиції відносно об′єднання маємо таке твердження.

Твердження 5.7. $(R^+)^+ = R^+$ і $(R^*)^* = R^*$ для довільного відношення R на множині A.

Твердження 5.8. Транзитивне замикання R^+ рефлексивного відношення R на множині A є рефлексивним.

► Доведення безпосередньо випливає з твердження 5.3 та інваріантності рефлексивності відношень відносно операції об'єднання. ◄

Твердження 5.9. Якщо відношення R на множині A симетричне, то відношення R^+ і R^* також симетричні.

► Доведення безпосередньо випливає з твердження 5.4 та інваріантності симетричності відношень відносно операції об'єднання. ◄

Теорема 5.7 про транзитивне замикання. Транзитивне замикання R^+ відношення R на множині A є транзитивним.

► Згідно з критерієм транзитивності достатньо довести, що $R^+\circ R^+\subseteq R^+$:

$(x, y)\in R^+\circ R^+ \Leftrightarrow \exists z\,((x, z)\in R^+ \wedge (z, y)\in R^+) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists z\,((x, z)\in \bigcup\limits_{n\in N_+} R^{(n)} \wedge (z, y)\in \bigcup\limits_{n\in N_+} R^{(n)}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists z\,(\exists i\in N_+\,(x, z)\in R^{(i)} \wedge \exists j\in N_+\,(z, y)\in R^{(j)}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists i\in N_+\,\exists j\in N_+\,\exists z\,((x, z)\in R^{(i)} \wedge (z, y)\in R^{(j)}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists i\in N_+\,\exists j\in N_+\,(x, y)\in R^{(i)}\circ R^{(j)} \Leftrightarrow \exists i\in N_+\,\exists j\in N_+\,(x, y)\in R^{(i+j)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k\in N_+\,(x, y)\in R^{(k)} \Leftrightarrow (x, y)\in \bigcup\limits_{n\in N_+} R^{(n)}$. ◄

Теорема 5.8 про рефлексивно-транзитивне замикання. Транзитивно-рефлексивне замикання R^* відношення R на множині A є рефлексивним і транзитивним.

► За теоремою 5.7 відношення R^+ є транзитивним, тому $R^+\circ R^+\subseteq R^+$. $R^* = i_A\cup R^+$, тому

$R^*\circ R^* = (i_A\cup R^+)\circ(i_A\cup R^+) = (i_A\circ i_A)\cup(i_A\circ R^+)\cup(R^+\circ i_A)\cup(R^+\circ R^+) =$

$= i_A\cup R^+\cup(R^+\circ R^+) \subseteq i_A\cup R^+\cup R^+ = i_A\cup R^+ = R^*$.

Отже, відношення R^* є транзитивним. За $R^* = i_A\cup R^+$ маємо $i_A\subseteq R^*$, і відношення R^* є рефлексивним. ◄

Теорема 5.9. Відношення R на множині A є транзитивним тоді й тільки тоді, коли $R = R^+$.

► ($\Rightarrow$) Доведення безпосередньо випливає з означення транзитивного замикання, твердження 5.6 та властивостей операції об'єднання.

($\Leftarrow$) За теоремою 5.7 відношення R^+ є транзитивним. Оскільки $R = R^+$, відношення R транзитивне. ◄

Теорема 5.10 про транзитивне замикання відношення на скінченній множині. Нехай R – відношення на n-елементній множині A, $n\in N_+$. Тоді $R^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^{(i)}$.

► $\bigcup\limits_{i=1}^{n} R^{(i)}\subseteq R^+$ за означенням транзитивного замикання. Доведемо обернене включення. Розглянемо довільний елемент $(x, y)\in R^+$. За означенням транзитивного замикання $(x, y)\in R^{(m)}$ при деякому $m\in N_+$. Без обмеження загальності можна вважати, що m – це найменше додатне значення, для якого $(x, y)\in R^{(m)}$, тобто $\forall i\in N_+\,((i < m) \to (x, y)\notin R^{(m)})$. Оскільки $(x, y)\in R^{(m)}$, то знайдуться елементи $x_0, x_1, \ldots, x_m$ такі, що $x = x_0$, $(x_0, x_1)\in R$, $(x_1, x_2)\in R, \ldots, (x_{m-1}, x_m)\in R$ і $x_m = y$. Якщо $m > n$, то серед елементів $x_1, \ldots, x_m$ є хоча б два однакових. Припустимо, що $x_i = x_j$, де $1 \le i < j \le m$. Тоді $x = x_0$, $(x_0, x_1)\in R, \ldots, (x_{i-1}, x_i)\in R$, $(x_i, x_{j+1})\in R, \ldots, (x_{m-1}, x_m)\in R$ і $x_m = y$, звідси $(x, y)\in R^{(m-(j-i))}$. Але $1 \le m-(j-i) < m$, що суперечить вибору m. Звідси $m \le n$ і $(x, y)\in R^+ \Rightarrow \exists m\in \overline{1,n}\ (x, y)\in R^{(m)} \Leftrightarrow (x, y)\in \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^{(i)}$. Отже, $R^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^{(i)}$. ◄

Теорема 5.11 про рефлексивно-транзитивне замикання відношення на скінченній множині. Нехай R – відношення на n-елементній множині A, $n\in N_+$. Тоді $R^* = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} R^{(i)}$.

► Доведення майже дослівно повторює доведення теореми 5.10, лише замість умови $m > n$ та елементів $x_1, \ldots, x_m$ треба розглянути $m > n$ -1 та елементи $x_0, x_1, \ldots, x_m$. ◄

Приклад 5.1. Для довільної скінченної n-елементної множини A існує відношення R таке, що $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} R^{(i)} \ne R^+$ і $\bigcup\limits_{i=0}^{n-2} R^{(i)} \ne R^*$.

► Розглянемо $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ і $R = \{(a_i, a_{i+1}) \mid i\in \overline{1, n-1}\}\cup\{(a_n, a_1)\}$. Тоді $R^+ = R^* = A\times A$, але $(a_1, a_1)\notin \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} R^{(i)}$, $(a_1, a_n)\notin \bigcup\limits_{i=0}^{n-2} R^{(i)}$. ◄

Теорема 5.12. Відношення R^+ є найменшим (за включенням) транзитивним відношенням, яке включає задане відношення R.

► За теоремою 5.7 відношення R^+ є транзитивним. Нехай R_1 є транзитивним відношенням і $R\subseteq R_1$. Достатньо довести, що $R^+\subseteq R_1$. За твердженням 5.2 $R^{(n)}\subseteq R_1^{(n)}$ за всіх $n\in N_+$. Оскільки R_1 транзитивне, то за твердженням 5.6 $R_1^{(n)}\subseteq R_1$ за всіх $n\in N_+$.

$(x, y)\in R^{+} \Leftrightarrow (x, y)\in \bigcup\limits_{n\in N_{+}} R^{(n)} \Leftrightarrow \exists n\in N_{+}\ (x, y)\in R^{(n)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n\in N_{+}\ (x, y)\in R_1^{(n)} \Rightarrow (x, y)\in R_1$. ◄

Твердження 5.10. Транзитивне замикання R^{+} відношення R на множині A дорівнює перетину $T(A, R)$ всіх транзитивних відношень на множині A, які включають R.

► За теоремою 5.12 кожне транзитивне відношення, яке включає R, необхідно включає й R^{+}. Тоді перетин всіх транзитивних відношень на множині A, які включають R, включає й R^{+}: $R^{+}\subseteq T(A, R)$. З іншого боку, відношення R^{+} транзитивне і включає R. Тоді $T(A, R)\subseteq R^{+}$. Отже, $T(A, R) = R^{+}$, що й треба було довести. ◄

5.4. Відношення еквівалентності

5.4.1. Означення та приклади

Відношення на множині A, яке одночасно є рефлексивним, симетричним і транзитивним, називається ***відношенням еквівалентності***, або ***еквівалентністю*** (на A). Очевидно, що діагональ i_A множини A є відношенням еквівалентності. Кожне відношення еквівалентності є рефлексивним, тому i_A є найменшим (за включенням) відношенням еквівалентності на A; найбільшим є відношення $A\times A$.

Наведемо кілька прикладів відношень еквівалентності.

Приклад 5.2. Відношення $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3), (1, 4), (4, 1)\}$ є еквівалентністю на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Приклад 5.3. Відношення "є родичем" є еквівалентністю на множині людей.

Приклад 5.4. Відношення подібності трикутників у евклідовому просторі є еквівалентністю.

Приклад 5.5. Відношення $\{(x, y) \mid x$ і y дають однакові остачі при діленні на 10$\}$ є еквівалентністю на множині цілих чисел.

Наступний приклад узагальнює попередній.

Приклад 5.6. Нехай f – деяке відображення типу $A\to B$. Побудуємо відношення $R = \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\}$. Воно є рефлексивним на множині A, симетричним і транзитивним, отже, це еквівалентність на A.

З результатів розділу 5.2 одержуємо такий наслідок.

Наслідок 5.7. Якщо R_1, R_2 – відношення еквівалентності на множині A, то $R_1\cap R_2$, R_1^{-1} є відношеннями еквівалентності на множині A.

Зауваження. Різниця рефлексивних відношень є антирефлексивним відношенням, тому не є еквівалентністю. Об'єднання та композиція еквівалентностей також можуть не бути еквівалентностями. Наприклад, якщо $A = \{1, 2, 3\}$, $R_1 = i_A\cup\{(1, 2), (2, 1)\}$, $R_2 = i_A\cup\{(2, 3), (3, 2)\}$, то $R_1\cup R_2 = i_A\cup\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$, $R_1\circ R_2 = i_A\cup\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3)\}$. Отже, R_1 і R_2 є еквівалентностями на множині A, проте $R_1\cup R_2$ не транзитивне, а $R_1\circ R_2$ не симетричне.

5.4.2. Фактор-множина

Нехай R є еквівалентністю на множині A. ***Класом еквівалентності*** елемента $a\in A$ за еквівалентністю R називається множина $\{b \mid aRb\}$, яку позначають $[a]_R$ або a/R. Безпосередньо з цього означення отримуємо таку теорему.

Теорема 5.13 про класи еквівалентності. Нехай R є еквівалентністю на множині A. Тоді:

1) $\forall a\in A\ a\in[a]_R$;
2) $aRb \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$;
3) якщо $a, b\in A$ і $(a, b)\notin R$, то $[a]_R\cap[b]_R = \varnothing$.

Множина класів еквівалентності за еквівалентністю R на множині A називається ***фактор-множиною*** множини A за еквівалентністю R і позначається A/R. Згідно з означенням $A/R = \{[a]_R \mid a\in A\}$. Якщо фактор-множина A/R скінченна, то кількість її елементів називається ***індексом*** еквівалентності R, а сама еквівалентність R – ***еквівалентністю скінченного індексу***.

Так, у прикладі 5.2 маємо $A/R = \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$, індекс еквівалентності дорівнює 2. У прикладі 5.5 фактор-множиною є $\{\{x \mid x\equiv i \pmod{10}\} \mid i\in \overline{0,9}\}$; індекс еквівалентності – 10. $A/i_A = \{\{a\} \mid a\in A\}$ для довільної множини A.

Кількість класів еквівалентності на непорожній скінченній множині A не більше $N(A)$ – кількості елементів множини A, і не менше 1. Еквівалентність i_A має індекс $N(A)$, а $A\times A$ – 1.

Розглянемо два відображення, пов'язані з еквівалентностями. Повернемося до еквівалентності R з прикладу 5.6. За означенням, $A/R = \{\{x \mid f(x) = f(y)\} \mid y\in A\}$. Ця еквівалентність називається ***ядерною еквівалентністю*** відображення f. Означимо відображення h: $A/R \to f(A)$ як $h([a]_R) = f(a)$ за всіх $a\in A$. За побудовою еквівалентності R маємо, що h є всюди визначеною, функціональною, ін'єктивною та сюр'єктивною відповідністю між A/R і $f(A)$, тобто бієктивним відображенням A/R на $f(A)$.

Означимо відображення γ: $A \to A/R$ як $\gamma(a) = [a]_R$ за кожного $a\in A$. Його називають ***канонічним***, або ***природним***, ***відображенням*** множини на її фактор-множину. Побудовані відображення зв'язані рівністю $f = \gamma\circ h$.

У багатьох галузях математики велике значення має поняття ***канонічного представника*** класу еквівалентності – це певним чином фіксований елемент, який має властивості, притаманні всім елементам класу еквівалентності. Наприклад, у класах еквівалентності відношення $\{(x, y) \mid x$ і y дають однакові остачі при діленні на 10$\}$ на N в якості канонічних представників природно взяти найменші числа класів, тобто 0, 1, …, 9.

Різні класи еквівалентності не перетинаються, тому фактор-множина A/R є розбиттям множини A. Аналогічно, кожному розбиттю $S = \{A_i\}_{i\in I}$ множини A на непорожні класи можна поставити у відповідність еквівалентність $R_S = \{(x, y) \mid \exists i\in I\ (x\in A_i \wedge y\in A_i)\}$, причому $A/R_S = S$. Отже, відповідність $\varphi = \{(R, A/R) \mid R$ – еквівалентність на $A\}$ є бієкцією між множиною всіх еквівалентностей на множині A та множиною всіх розбиттів множини A на непорожні класи.

Задачі

5.1. На множині Z задано відношення:
$(m, n)\in R_1 \Leftrightarrow m+n$ – парне число;
$(m, n)\in R_2 \Leftrightarrow m+n$ – непарне число;
$(m, n)\in R_3 \Leftrightarrow m\text{-}n\le 100$;
$(m, n)\in R_4 \Leftrightarrow m/n$ – парне число;
$(m, n)\in R_5 \Leftrightarrow m/n$ – непарне число;
$(m, n)\in R_6 \Leftrightarrow m\cdot n$ – парне число;
$(m, n)\in R_7 \Leftrightarrow m\cdot n$ – непарне число;
$(m, n)\in R_8 \Leftrightarrow m$ і n є взаємно простими;
$(m, n)\in R_9 \Leftrightarrow m\le n$;
$(m, n)\in R_{10} \Leftrightarrow m$ ділиться націло на n;
$(m, n)\in R_{11} \Leftrightarrow m/n$ є цілим додатним степенем числа 2.
Визначити, які з цих відношень є
а) рефлексивними;
б) антирефлексивними;
в) симетричними;
г) антисиметричними;
д) транзитивними.

5.2. Довести, що транзитивне й антирефлексивне відношення R є антисиметричним.

5.3. Довести, що за довільних рефлексивних відношень R_1 і R_2 на множині A виконується $R_1\cup R_2\subseteq R_1\circ R_2$.

5.4. Яку найбільшу кількість елементів може мати антисиметричне відношення на n-елементній множині?

5.5. Довести, що для симетричних відношень R_1 і R_2 на множині A відношення $(R_1\circ R_2)\cup(R_2\circ R_1)$ є симетричним.

5.6. Довести, що композиція $R_1\circ R_2$ двох симетричних відношень є симетричним відношенням тоді й тільки тоді, коли $R_1\circ R_2 = R_2\circ R_1$.

5.7. Довести, що для довільного відношення R на множині A найменше симетричне відношення Q, яке включає R, дорівнює $R\cup R^{-1}$.

5.8. Для еквівалентності R на множині A довести, що $R\circ R = R$.

5.9. Для еквівалентності R на множині A довести, що $R^* = R$.

5.10. Для рефлексивного й транзитивного відношення R на множині A довести, що $R\cap R^{-1}$ є відношенням еквівалентності на множині A.

5.11. Довести, що відношення R на множині A є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли $(R\circ R^{-1})\cup i_A = R$.

5.12. Довести, що композиція $R_1\circ R_2$ двох еквівалентностей на множині A є еквівалентністю на множині A тоді й тільки тоді, коли $R_1\circ R_2 = R_2\circ R_1$.

5.13. Довести, що композиція $R_1\circ R_2$ двох еквівалентностей на множині A є еквівалентністю на множині A тоді й тільки тоді, коли відношення $R_1\circ R_2$ симетричне.

5.14. Нехай R_1 і R_2 – еквівалентності на множині A. Довести, що відношення $R_1\circ R_2\circ R_1$ є еквівалентністю на множині A тоді й тільки тоді, коли $R_2\circ R_1\circ R_2 \subseteq R_1\circ R_2\circ R_1$.

5.15. Для еквівалентностей R_1, R_2 на множині A довести, що відношення $(R_1\cup R_2)^*$ є еквівалентністю на множині A.

5.16. Для еквівалентностей R_1, R_2 на множині A довести, що відношення $((R_1\circ R_2)\cup(R_2\circ R_1))^*$ є еквівалентністю на множині A.

5.17. Довести, що $(R\cup R^{-1})^*$ є найменшим відношенням еквівалентності на множині A, яке включає відношення R на множині A.

5.18. Нехай R_1 і R_2 – еквівалентності на множині A. Довести, що $(R_1\cup R_2)^*$ є найменшим відношенням еквівалентності на множині A, яке включає $R_1\cup R_2$.

5.19. Довести, що для сім'ї еквівалентностей $\{R_i\}_{i\in I}$ на множині A найменшою еквівалентністю, яка містить $\bigcup_{i\in I} R_i$, є відношення $(\bigcup_{i\in I} R_i)^*$.

5.20. Побудувати на n-елементній множині A, де $n\in N$, таке відношення R з мінімально можливою кількістю елементів, що $A\times A$ є найменшою еквівалентністю, яка включає R.

5.21. Для еквівалентності R на множині A довести, що $[a]_R\times[a]_R\subseteq R$ для довільного елемента $a\in A$.

5.22. Для еквівалентності R на множині A довести, що сім'я множин $\{[a]_R\times[a]_R\}_{a\in A}$ є розбиттям еквівалентності R.

ГЛАВА 6. Відношення порядку

Часткове упорядкування об'єктів зустрічається не лише в математиці, а й у практичній діяльності. Наприклад, у будівництві окремі види будівельних робіт частково залежать одна від одної – вікна та електрику можна монтувати лише після зведення стін, але незалежно одне від одного, а штукатурні роботи проводять після всіх указаних. Згадаємо упорядкування натуральних чисел відношенням "ділить": 1 ділить 2 та 3, 2 та 3 ділять 6 і взаємно не діляться.

У математиці упорядкування об'єктів має фундаментальне значення, і в цій главі представлено основні поняття, пов'язані з ним.

6.1. Відношення порядку

Відношення на множині A, яке одночасно є рефлексивним, антисиметричним та транзитивним, називається ***відношенням часткового порядку***, або ***частковим порядком*** (на A). Інколи вживають терміни ***відношення порядку*** та ***порядок***. Непорожню множину A разом із заданим на ній частковим порядком R називають ***частково впорядкованою множиною*** (***ЧВМ***) і позначають (A, R). За означенням діагональ i_A множини A є частковим порядком, причому найменшим (за включенням) на A.

Приклад 6.1. Відношення $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ є частковим порядком на множині $\{1, 2, 3, 4\}$. Відношенням часткового порядку є традиційне відношення $\le$ на множині дійсних чисел.

Нехай R є відношенням часткового порядку на множині A. Елементи $a, b \in A$ називаються ***порівнюваними*** за відношенням R, якщо aRb або bRa. За означенням часткового порядку кожен елемент є порівнюваним із собою, проте не для кожного часткового порядку кожна пара елементів є порівнюваною. Так, у прикладі 6.1 елементи 1 та 4 непорівнювані.

Для відношення часткового порядку замість R прийнято вживати позначку $\le$ і запис $a \le b$ читати "a менше або дорівнює b". За кожним відношенням часткового порядку $\le$ можна побудувати двоїсте до нього відношення $\ge$: за означенням $b \ge a$ тоді й тільки тоді, коли $a \le b$. На рівні відношень має місце рівність $(\ge) = (\le)^{-1}$. Відповідно, запис $a \ge b$ читають "a більше або дорівнює b".

Скінченну частково впорядковану множину $(A, \le)$ зручно зображати спрощеною діаграмою, на якій завдяки транзитивності та рефлексивності наведено не всі пари відношення. Нарисуємо точки та позначимо їх елементами множини A. З точки a проведемо стрілку в точку b тоді й тільки тоді, коли $a \le b$ і в множині A не існує іншого елемента c такого, що $a \le c$ і $c \le b$. В останньому випадку кажуть, що b ***домінує*** над a. Отже, стрілки на діаграмі відповідають домінуванню. На рис. 6.1 зображено діаграму частково впорядкованої множини з прикладу 6.1.

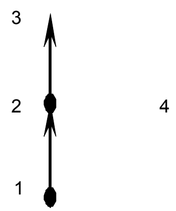

Рис. 6.1. Діаграма частково впорядкованої множини з прикладу 6.1

Кожному відношенню $\le$ часткового порядку на множині A відповідає відношення $<$ ***строгого порядку*** на A: $a < b$ тоді й тільки тоді, коли $a \le b$ і $a \ne b$. Отже, ***строгий порядок*** – це антирефлексивне, антисиметричне й транзитивне відношення на множині A, наприклад, звичайне відношення $<$ на множині дійсних чисел. Кожному строгому порядку $<$ на множині M відповідає частковий порядок $\le$: $(\le) = (<) \cup i_A$.

Приклад 6.2. Булеан $P(M)$ довільної множини M частково впорядковано відношенням включення $\subseteq$. Дійсно, за $X \in P(M)$ виконується $X \subseteq X$, тобто відношення $\subseteq$ є рефлексивним. З $X \subseteq Y$ і $Y \subseteq X$ випливає $X=Y$, тому відношення $\subseteq$ є антисиметричним. Нарешті, з $X \subseteq Y$ і $Y \subseteq Z$ випливає $X \subseteq Z$, тому відношення $\subseteq$ є транзитивним. Отже, $\subseteq$ є відношенням часткового порядку на $P(M)$.

Приклад 6.3. Означимо на множині додатних натуральних чисел N_+ відношення $\le$ так: $a \le b \Leftrightarrow b$ ділиться на a без остачі. Це відношення є частковим порядком. Дійсно, кожне додатне натуральне число ділиться на себе; якщо a ділиться на b і b ділиться на a, то $a=b$; якщо a ділиться на b і b ділиться на c, то a ділиться на c. Отже, це відношення є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним.

Приклад 6.4. Нехай $\le_A$ – частковий порядок на множині A, $\le_B$ – частковий порядок на множині B. Назвемо ***прямим добутком*** частково впорядкованих множин $(A, \le_A)$ і $(B, \le_B)$ множину $A \times B$ із заданим на ній відношенням $\le_A \times \le_B$, позначеним $\le$: $(a_1, b_1) \le (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \le_A a_2$ і $b_1 \le_B b_2$. Доведемо, що $\le$ є частковим порядком на $A \times B$.

► $\le_A$ і $\le_B$ рефлексивні, тому

$$a \in A \wedge b \in B \Leftrightarrow a \le_A a \wedge b \le_B b \Leftrightarrow (a, b) \le (a, b),$$

і відношення $\le$ є рефлексивним. З антисиметричності відношень $\le_A$ та $\le_B$ маємо антисиметричність $\le$:

$$(a, b) \le (c, d) \wedge (c, d) \le (a, b) \Leftrightarrow a \le_A c \wedge b \le_B d \wedge c \le_A a \wedge d \le_B b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = c \wedge b = d \Leftrightarrow (a, b) = (c, d).$$

Транзитивність $\le$ випливає з транзитивності $\le_A$ та $\le_B$:

$$(a, b) \le (c, d) \wedge (c, d) \le (e, f) \Leftrightarrow a \le_A c \wedge b \le_B d \wedge c \le_A e \wedge d \le_B f \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \le_A e \wedge b \le_B f \Leftrightarrow (a, b) \le (e, f). \blacktriangleleft$$

Поняття прямого добутку можна поширити на довільну сукупність частково впорядкованих множин. Нехай $A = \{(A_i, \le_i)\}_{i\in I}$ – непорожня сім′я частково впорядкованих множин. Прямим добутком сім′ї A назвемо множину $\prod_{i\in I} A_i$ разом із заданим на ній відношенням $\le$: для $f_1, f_2 \in \prod_{i\in I} A_i$ відношення $f_1 \le f_2$ має місце тоді й тільки тоді, коли $\forall i\in I\ f_1(i) \le_i f_2(i)$.

Теорема 6.1 про прямий добуток порядків. Прямий добуток $(\prod_{i\in I} A_i, \le)$ непорожньої сім′ї $A = \{(A_i, \le_i)\}_{i\in I}$ частково впорядкованих множин є частково впорядкованою множиною.

► Нехай $f\in \prod_{i\in I} A_i$, оскільки для всіх $i\in I$ відношення $\le_i$ рефлексивне, то $f\in \prod_{i\in I} A_i \Rightarrow \forall i\in I\ f(i) \le_i f(i) \Leftrightarrow f\le f$. Отже $\le$ є рефлексивним на $\prod_{i\in I} A_i$.

Доведемо антисиметричність $\le$:

$f_1 \le f_2 \wedge f_2 \le f_1 \Leftrightarrow \forall i\in I\ f_1(i) \le_i f_2(i) \wedge \forall i\in I\ f_2(i) \le_i f_1(i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall i\in I\ (f_1(i) \le_i f_2(i) \wedge f_2(i) \le_i f_1(i)) \Rightarrow^{(\le i \text{ антисиметричне})} \forall i\in I\ (f_1(i) = f_2(i)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f_1 = f_2$.

Доведемо транзитивність $\le$:

$f_1 \le f_2 \wedge f_2 \le f_3 \Leftrightarrow \forall i\in I\ f_1(i) \le_i f_2(i) \wedge \forall i\in I\ f_2(i) \le_i f_3(i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall i\in I\ (f_1(i) \le_i f_2(i) \wedge f_2(i) \le_i f_3(i)) \Rightarrow^{(\le i \text{ транзитивне})} \forall i\in I\ (f_1(i) \le_i f_3(i)) \Leftrightarrow f_1 \le f_3$.

Отже, $\le$ є частковим порядком на $\prod_{i\in I} A_i$. ◄

Приклад 6.5. Нехай $A = \{(A_i, \le_i)\}_{i\in I}$, де $I=\overline{1,n}$, $A_i = R$, $\le_i = \le$, $i\in \overline{1,n}$, R – множина дійсних чисел, а $\le$ – звичайний порядок "менше або дорівнює" на R. Тоді прямим добутком порядків $\le_i$ на R є порядок $\le_{(n)}$ на множині R^n:

$(a_1, a_2, ..., a_n) \le_{(n)} (b_1, b_2, ..., b_n) \Leftrightarrow a_1 \le b_1 \wedge a_2 \le b_2 \wedge ... \wedge a_n \le b_n$.

Твердження 6.1. Нехай $(A, \le)$ – частково впорядкована множина і $\varnothing \subset B \subseteq A$. Тоді звуження $\le|_B$ відношення $\le$ на множину B є частковим порядком на B.

► Рефлексивність на B і транзитивність відношення $\le|_B = \le \cap (B\times B)$ випливає з інваріантності цих властивостей відносно перетину. Антисиметричність $\le|_B$ випливає з $\le|_B \subseteq \le$ та антисиметричності $\le$. ◄

6.2. Лінійний порядок

Частковий порядок R на множині A називається ***лінійним***, якщо кожні два елементи множини A порівнювані за R, тобто $\forall a, b\in A\ (aRb \vee bRa)$. Відповідно, частково впорядковану множину (A, R) називають ***лінійно впорядкованою***, або ***ланцюгом***.

Наприклад, порядок $\le$ на множині дійсних чисел є лінійним. Порядки в прикладах 6.1, 6.3 не є лінійними. Порядок $\le_{(2)}$ на множині R^2 не є лінійним, оскільки пари (1, 2) і (2, 1) непорівнювані. Прямий добуток лінійних порядків в загальному випадку також не є лінійним.

Нехай A – довільна непорожня множина; її елементи назвемо ***символами*** (***літерами***), а саму множину A – ***алфавітом***. Означимо ***слово*** в алфавіті A як скінченну послідовність $x_1x_2\ldots x_n$ елементів з A, можливо, порожню. Порожню послідовність називають ***порожнім словом*** і позначають ε. A^* позначає множину всіх слів в алфавіті A. Два слова рівні тоді й тільки тоді, коли вони рівні як послідовності, тобто

$x_1x_2\ldots x_m = y_1y_2\ldots y_n \Leftrightarrow m=n \wedge \forall i\in \overline{1,n}\ x_i = y_i$.

Припустимо, що на множині A задано лінійний порядок $\le$. Побудуємо на множині A^* відношення $\le_l$ так:

$x_1x_2\ldots x_m \le_l y_1y_2\ldots y_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists i \le \min\{m, n\}\ ((\forall j<i\ x_j = y_j) \wedge x_i < y_i)) \vee$

$\vee ((m \le n) \wedge (x_1x_2\ldots x_m = y_1y_2\ldots y_m))$.

Відношення $\le_l$ є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним, отже є порядком. Неважко переконатись, що довільні два слова в алфавіті A порівнювані за порядком $\le_l$. Отже, порядок $\le_l$ є лінійним на A^*. Його називають ***лексикографічним порядком***. За лексикографічним порядком упорядковуються статті в словниках. Нехай $A = \{a, b\}$, $a \le b$, тоді $\varepsilon <_l a <_l aa <_l ab <_l b <_l ba <_l bb$.

Поняття лексикографічного порядку допускає таке узагальнення. Нехай $(I, \le)$ – лінійно впорядкована множина і $A=\{(A_i, \le_i)\}_{i\in I}$ – сім′я лінійно впорядкованих множин. Відношення $\le_l$ на декартовому добутку $\prod_{i\in I} A_i$ означимо так:

для $f, g \in \prod_{i\in I} A_i$

$f \le_l g \Leftrightarrow (f=g) \vee \exists i\in I\ (f(i) <_i g(i) \wedge (\forall j\in I\ (j < i \rightarrow f(j) = g(j))$.

Неважко довести, що відношення $\le_l$ є лінійним порядком на множині $\prod_{i\in I} A_i$.

За допомогою конструкції лексикографічного порядку можна побудувати лінійний порядок на декартовому добутку лінійно впорядкованих множин.

Перед наступними прикладами зауважимо, що послідовність довжини n елементів множини A можна розглядати як елемент множини A^n.

Приклад 6.6. Побудуємо лінійний порядок на множині N^2.

► *Перший спосіб (за допомогою лексикографічного порядку)*. Нехай $\le$ – звичайне відношення порядку на множині N. Лексикографічний порядок $\le_l \cap (N^2\times N^2)$ є лінійним порядком на множині N^2.

Другий спосіб (за допомогою бієкції з лінійно впорядкованою множиною). Нехай f – бієкція між N^2 і N. Відношення R на N^2 означимо так:

$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow f(x_1, y_1) \le f(x_2, y_2)$.

Воно є лінійним порядком на N^2 за властивостями бієкції й лінійністю $\le$. ◄

Приклад 6.7. Побудуємо лінійний порядок на множині $N^+ = \bigcup_{i\in N_+} N^i$.

► Нехай $\le$ – звичайне відношення порядку на множині N. Лексикографічний порядок $\le_l \cap (N^+ \times N^+)$ є лінійним порядком на множині N^+. ◄

Твердження 6.2. Нехай $(A, \le)$ – лінійно впорядкована множина і $\varnothing \subset B \subseteq A$. Тоді звуження $\le|_B$ відношення $\le$ на множину B є лінійним порядком на B.

► $\le|_B$ є порядком як звуження порядку. Якщо $a, b \in B$, то $a \le b$ або $b \le a$, а тоді $a \le|_B b$ або $b \le|_B a$. Отже, порядок $\le|_B$ є лінійним на B. ◄

6.3. Екстремальні елементи частково впорядкованих множин

Нехай $(A, \le)$ – частково впорядкована множина. Елемент $x \in A$ називається ***найбільшим*** (***найменшим***) в множині A, якщо він більше (менше) всіх інших елементів множини A. Отже, найбільший (найменший) елемент, якщо існує, то **порівнюваний з усіма** елементами множини A. Елемент $x \in A$ називається ***максимальним*** (***мінімальним***) в множині A, якщо в множині A не існує елемента, більшого (меншого) за x. Інколи найбільший елемент називають ***останнім***, а найменший – ***першим***.

x – найбільший в $A \Leftrightarrow \forall y \in A\ y \le x$

x – найменший в $A \Leftrightarrow \forall y \in A\ x \le y$

x – максимальний в $A \Leftrightarrow \forall y \in A\ \neg(x < y)$

x – мінімальний в $A \Leftrightarrow \forall y \in A\ \neg(y < x)$

Безпосередньо з означень випливає таке твердження.

Твердження 6.3. Для частково впорядкованої множини кожен найбільший елемент є максимальним, кожен найменший елемент є мінімальним.

Теорема 6.2 про кількість найбільших елементів. Частково впорядкована множина містить не більше одного найбільшого (найменшого) елемента.

► Нехай частково впорядкована множина $(A, \le)$ містить два найбільших елементи a_1 і a_2. Тоді $a_2 \le a_1$, оскільки $\forall a \in A\ a \le a_1$, і $a_1 \le a_2$, оскільки $\forall a \in A\ a \le a_2$. Антисиметричність забезпечує $a_1 = a_2$, тобто єдиність найбільшого елемента. Єдиність найменшого елемента встановлюється аналогічно. ◄

Теорема 6.3 про найбільший елемент. Найбільший (найменший) елемент частково впорядкованої множини є єдиним максимальним (мінімальним) елементом у цій множині.

► Нехай частково впорядкована множина $(A, \le)$ містить найбільший елемент a_1, а a_2 – деякий максимальний елемент. Тоді $a_2 \le a_1$, оскільки $\forall a \in A\ a \le a_1$, і $\neg(a_2 < a_1)$, оскільки $\forall a \in A\ \neg(a_2 < a)$. Оскільки a_2 і a_1 порівнювані, то з $\neg(a_2 < a_1)$ випливає $a_1 \le a_2$, але тоді $a_1 = a_2$. Звідси найбільший елемент є єдиним максимальним. Твердження щодо найменшого/мінімального елемента доводиться аналогічно. ◄

Приклад 6.8. Множина $(R, \le)$ дійсних чисел із традиційним відношенням порядку не має ні максимального, ні мінімального, ні найбільшого, ні найменшого елементів.

Приклад 6.9. Множина $(N, \le)$ натуральних чисел із традиційним відношенням порядку не має максимального й найбільшого елементів, але має найменший та мінімальний елемент 0.

Приклад 6.10. Для частково впорядкованої множини (N, i_N) усі елементи одночасно максимальні й мінімальні; найбільшого та найменшого немає.

Приклад 6.11. Множина $(Z \cup \{a\}, \le \cup \{(a, a)\})$, де $\le$ – традиційне відношення порядку на множині цілих чисел, $a \notin Z$, не має ні найбільшого, ні найменшого елементів, але має рівно один мінімальний та максимальний елемент a.

Теорема 6.4 про максимальний елемент лінійно впорядкованої множини. Максимальний (мінімальний) елемент лінійно впорядкованої множини є найбільшим (найменшим) елементом у цій множині.

► У лінійно впорядкованій множині кожні два елементи порівнювані між собою, тому максимальний елемент порівнюваний з кожним елементом множини і не менший за нього, тобто за означенням є найбільшим. Твердження щодо мінімального елемента доводиться аналогічно. ◄

Теорема 6.5 про скінченну частково впорядковану множину. Довільна непорожня скінченна частково впорядкована множина $(A, \le)$ містить мінімальний та максимальний елементи.

► Доведемо твердження про існування мінімального елемента (для максимального аналогічно).

Візьмемо довільний елемент $a_1 \in A$. Якщо він не є мінімальним, то існує елемент $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ такий, що $a_2 < a_1$. Якщо й елемент a_2 не є мінімальним, то знайдеться елемент $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ такий, що $a_3 < a_2$, і т. д. Оскільки множина A скінченна, то на деякому кроці процес зупиниться. Останній знайдений елемент є мінімальним. ◄

Зауваження. Оскільки для довільної непорожньої множини B, $B \subseteq A$, відношення $\le|_B$ є частковим порядком на B, наведені означення та теореми автоматично переносяться на множину B, тобто можна говорити про найбільший (найменший) та максимальний (мінімальний) елементи підмножини частково впорядкованої множини. Наприклад, елемент $x \in B$ є найбільшим елементом у множині B, якщо він є найбільшим елементом у множині $(B, \le|_B)$.

6.4. Індуктивні множини та принцип трансфінітної індукції

У цьому розділі представлено принцип трансфінітної індукції. Він відіграє дуже важливу роль у математиці, оскільки поширює просту індукцію на частково впорядковані множини. Спочатку розглянемо властивості частково впорядкованих множин, наявність яких дозволяє застосовувати цей метод.

Нехай A_{min} – множина всіх мінімальних елементів частково впорядкованої множини $(A, \leq)$, B – множина, яка задовольняє умову $A_{min} \subseteq B \subseteq A$. Розглянемо ***умову індуктивності*** частково впорядкованої множини $(A, \leq)$: якщо для довільного елемента $a \in A$ з включення $\{b \in A \mid b < a\} \subseteq B$ випливає $a \in B$, то $B = A$, тобто [20]

$[(A_{min} \subseteq B \subseteq A) \wedge \forall a \in A\ ((\{b \in A \mid b < a\} \subseteq B) \to a \in B)] \Rightarrow A = B$

Частково впорядкована множина $(A, \leq)$ називається ***індуктивною***, якщо задовольняє умову індуктивності.

Частково впорядкована множина $(A, \leq)$ задовольняє ***умову обриву спадних ланцюгів***, якщо її довільний спадний ланцюг $x_1 > x_2 > \ldots$ є скінченним.

Частково впорядкована множина $(A, \leq)$ називається ***фундованою***, якщо задовольняє ***умову мінімальності***: будь-яка непорожня підмножина множини A має хоча б один мінімальний за $\leq$ елемент.

Нижче ми доведемо, що умови індуктивності, обриву спадних ланцюгів та мінімальності є рівносильними. Виконання цих умов для частково впорядкованих множин дозволяє доводити твердження про елементи множин методом трансфінітної індукції.

Твердження 6.4. Нехай $(A, \leq)$ є фундованою множиною і $\varnothing \subset B \subseteq A$. Тоді $(B, \leq|_B)$ – фундована множина.

► $\leq|_B$ є порядком як звуження порядку. Якщо $C \subseteq B$, то $C \subseteq A$ і C має хоча б один мінімальний за $\leq$ елемент, який є мінімальним і за $\leq|_B$, оскільки $\leq|_B$ є звуженням $\leq$. ◄

Лема 6.1. Кожна частково впорядкована фундована множина $(A, \leq)$ є індуктивною.

► Нехай $(A, \leq)$ є фундованою, але не задовольняє умові індуктивності. Тоді існує підмножина B, яка містить усі мінімальні елементи $(A, \leq)$, і для якої при довільному $a \in A$ з включення $\{b \in A \mid b < a\} \subseteq B$ випливає $a \in B$, але $B \neq A$. Множина $(A \backslash B, \leq|_{A \backslash B})$ за твердженням 6.4 є фундованою й має мінімальний елемент $a_0 \in A \backslash B$. У множині $A \backslash B$ немає елементів менше a_0, тому всі такі елементи належать B, тобто $\{b \in A \mid b < a_0\} \subseteq B$. Тоді за припущенням $a_0 \in B$. Суперечність, звідки $B = A$, тобто $(A, \leq)$ є індуктивною. ◄

Лема 6.1 обґрунтовує ***принцип трансфінітної індукції***. Нехай треба довести, що деяке твердження справджується для всіх елементів фундованої множини $(A, \leq)$. Через B позначимо множину елементів, які задовольняють твердження. Щоб застосувати принцип трансфінітної індукції, треба довести:

1) B містить усі мінімальні елементи множини A ("база індукції"),

2) для довільного елемента $a \in A$ (за доведеного п. 1 елемент a можна вважати немінімальним) з включення $\{b \in A \mid b < a\} \subseteq B$ випливає $a \in B$ ("перехід індукції").

За лемою 6.1 множина $(A, \leq)$ є індуктивною, тому за доведеним $B = A$. Саме в цьому висновку й полягає принцип трансфінітної індукції.

Лема 6.2. Кожна частково впорядкована індуктивна множина $(A, \leq)$ задовольняє умову обриву спадних ланцюгів.

► Розглянемо множину $B = \{ b \mid$ кожен спадний ланцюг $b > \ldots$ є скінченним$\}$. Якщо в частково впорядкованій множині $(A, \leq)$ існує мінімальний елемент a, то $a \in B$. Якщо всі елементи b, менші деякого c, належать B, то всі спадні ланцюги вигляду $c > b > \ldots$ також скінченні і $c \in B$. Тоді за умовою індуктивності $B = A$, тобто всі спадні ланцюги скінченні. ◄

Лема 6.3. Кожна частково впорядкована множина $(A, \leq)$, що задовольняє умову обриву спадних ланцюгів, є фундованою.

► Нехай існує непорожня підмножина $A_1 \subseteq A$ така, що множина $(A_1, \leq)$ не має мінімальних елементів. У кожній непорожній підмножині множини A_1 відмітимо по елементу. Побудуємо послідовність $a_1, a_2, \ldots$ за правилами: a_1 – це елемент, відмічений в A_1; якщо a_n – елемент послідовності, то a_{n+1} – це елемент, відмічений у підмножині $\{b \mid b \in A_1 \wedge b < a_n\}$. Очевидно, що послідовність нескінченна, оскільки $(A_1, \leq)$ не має мінімальних елементів. Отже, $(A, \leq)$ не задовольняє умові обриву спадних ланцюгів. Суперечність, звідки $(A, \leq)$ – фундована. ◄

Наслідок 6.1. Умови індуктивності, обриву спадних ланцюгів та мінімальності рівносильні для довільної частково впорядкованої множини $(A, \leq)$.

6.5. Повний порядок частково впорядкованих множин

Лінійно впорядкована множина $(A, \leq)$ називається ***цілком упорядкованою***, якщо довільна непорожня підмножина множини A має найменший елемент. Порядок $\leq$ в цьому разі називають ***повним*** [21].

Приклад 6.12. Множина $(N, \leq)$ натуральних чисел із традиційним відношенням порядку $\leq$ є цілком упорядкованою.

Теорема 6.6 про найменший елемент цілком упорядкованої множини. Цілком упорядкована множина $(A, \leq)$ має найменший елемент.

► $A \subseteq A$, тому за означенням цілком упорядкованої множини множина A має найменший за $\leq$ елемент. ◄

[20] З істинності твердження $\forall a \in A\ ((\{b \in A \mid b < a\} \subseteq B) \to a \in B)$ випливає, що $A_{min} \subseteq B$, тому умова індуктивності може бути переписана у такому еквівалентному вигляді

$[(B \subseteq A) \wedge \forall a \in A\ ((\{b \in A \mid b < a\} \subseteq B) \to a \in B)] \Rightarrow A = B$

[21] Множину A разом із заданим на ній повним порядком інколи називають ***перестановкою*** множини A.

Наслідок 6.2. Множина (Z, $\leq$) цілих чисел з традиційним відношенням порядку не є цілком упорядкованою.

► Якби множина (Z, $\leq$) була цілком упорядкованою, то за теоремою 6.6 мала б найменший елемент. Однак це не так, тому множина (Z, $\leq$) не є цілком упорядкованою. ◄

Твердження 6.5. Нехай (A, $\leq$) – цілком упорядкована множина і $\varnothing \subset B \subseteq A$. Тоді звуження $\leq|_B$ відношення $\leq$ на множину B є повним порядком на B.

► $\leq|_B$ є лінійним порядком як звуження лінійного порядку. Кожна непорожня підмножина C множини B є й підмножиною A, і за означенням цілком упорядкованої множини (C, $\geq|_C$) має найменший елемент. Але $C \subseteq B$, тому $\geq|_C = (\geq|_B)|_C$, тобто множина (C, $(\geq|_B)|_C$) має найменший елемент. Отже, множина (B, $\geq|_B$) є цілком упорядкованою за означенням. ◄

Кожна непорожня підмножина цілком упорядкованої множини має найменший елемент, який є мінімальним у цій підмножині. Звідси кожна цілком упорядкована множина є фундованою. Враховуючи леми 6.1 і 6.2, одержуємо такі наслідки.

Наслідок 6.3. Кожна цілком упорядкована множина є індуктивною.

Наслідок 6.4. Кожна цілком упорядкована множина задовольняє умову обриву спадних ланцюгів.

Якщо лінійно впорядкована множина має мінімальний елемент, то він є найменшим. За цих умов має місце така теорема.

Теорема 6.7. Критерій повноти порядку. Лінійно впорядкована множина є цілком упорядкованою тоді й тільки тоді, коли вона є фундованою.

► ($\Rightarrow$) Кожна цілком упорядкована множина є фундованою.

($\Leftarrow$) Кожна непорожня підмножина фундованої множини має хоча б один мінімальний елемент. Порядок є лінійним, тому мінімальний елемент єдиний і є найменшим елементом підмножини. Отже, вся множина є цілком упорядкованою. ◄

6.6. Решітки

6.6.1. Верхні та нижні грані

Нехай (A, $\leq$) – частково впорядкована множина, B – її непорожня підмножина. Елемент x множини A називається ***верхньою гранню***, або ***мажорантою***, множини B, якщо він не менше (тобто більше або дорівнює) кожного елемента множини B. Аналогічно, елемент x із A називається ***нижньою гранню*** (***мінорантою***) B, якщо він не більше (тобто менше або дорівнює) кожного елемента B.

Отже, кожна верхня та нижня грань (якщо існує) множини, порівнювана з усіма елементами множини:

x – верхня грань множини $B \Leftrightarrow x \in A \wedge \forall y \in B\ y \leq x$,

x – нижня грань множини $B \Leftrightarrow x \in A \wedge \forall y \in B\ x \leq y$.

Найменша з множини всіх верхніх граней множини B (якщо існує) називається ***точною верхньою гранню***, або ***супремумом***, множини B і позначається sup B. Найбільша з множини всіх нижніх граней множини B (якщо існує) називається ***точною нижньої гранню***, або ***інфінумом***, множини B і позначається inf B.

Отже, якщо точна верхня грань множини існує, то вона єдина. Те саме стосується точної нижньої грані множини. За означенням, супремум множини B порівнюваний з усіма елементами множини B (він "не менше" їх) й усіма її верхніми гранями ("не більше" їх). Аналогічно, інфімум множини B порівнюваний з усіма елементами множини B та усіма її нижніми гранями.

6.6.2. Решітки та їх найпростіші властивості

Частково впорядкована множина (A, $\leq$) називається ***решіткою***, якщо для довільних елементів $a, b \in A$ існує $\sup\{a, b\}$ та $\inf\{a, b\}$, які ще позначають, відповідно, $\sup(a, b)$ та $\inf(a, b)$ або $a \cup b$ та $a \cap b$.

Наприклад, решіткою є множина натуральних дільників числа 12, тобто {1, 2, 3, 4, 6, 12}, частково впорядкована відношенням "ділить". Неважко переконатися, що $\sup\{a, b\}$ – це найменше спільне кратне чисел a і b, а $\inf\{a, b\}$ – це їх найбільший спільний дільник.

Приклад 6.13. Для довільної множини M частково впорядкована множина ($P(M)$, $\subseteq$) є решіткою.

► Доведемо, що для довільних $a, b \in P(M)$ існують $\sup\{a, b\}$ і $\inf\{a, b\}$. Для цього доведемо, що $\sup\{a, b\} = a \cup b$ і $\inf\{a, b\} = a \cap b$.[22]

Оскільки $a \subseteq a \cup b$ і $b \subseteq a \cup b$, $a \cup b$ є верхньою гранню множини $\{a, b\}$. Якщо c – довільна верхня грань множини $\{a, b\}$, то $a \subseteq c$ і $b \subseteq c$, тому $a \cup b \subseteq c$. Отже, $a \cup b$ є найменшою серед усіх верхніх граней множини $\{a, b\}$, тобто $\sup\{a, b\}$ існує й дорівнює $a \cup b$. Те, що $\inf\{a, b\} = a \cap b$, доводиться аналогічно. ◄

На відміну від часткового та лінійного порядків, підмножина решітки може не бути решіткою. Наприклад, решіткою є ({1, 2, 3, 4}, $\leq$), де $\leq$ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (4, 4)} (див. рис. 6.2). Проте звуження $\leq$ на множину {1, 2, 4}, тобто ({1, 2, 4}, $\leq|_{\{1, 2, 4\}}$), не є решіткою, оскільки не існує, наприклад, sup{2, 4}.

Ошибка! Ошибка связи.Рис. 6.2. Діаграма решітки

Теорема 6.8 про точну грань порівнюваних елементів. Якщо для елементів a, b частково впорядкованої множини (A, $\leq$) виконується $a \leq b$, то існують $\sup\{a, b\}$ і $\inf\{a, b\}$, причому $\sup\{a, b\} = b$ і $\inf\{a, b\} = a$.

► Доведемо, що $\sup\{a, b\} = b$. Оскільки $a \leq b$, то b є верхньою гранню множини $\{a, b\}$. Нехай c – деяка верхня грань множини $\{a, b\}$. Тоді $b \leq c$. Звідси b є найменшою серед усіх верхніх граней множини $\{a, b\}$, тобто $\sup\{a, b\} = b$. Рівність $\inf\{a, b\} = a$ доводиться аналогічно. ◄

Наслідок 6.5. Кожна лінійно впорядована множина є решіткою.

---

[22] Тут знаки $\cup$ та $\cap$ позначають об'єднання та перетин множин a та b.

► В лінійно впорядкованій множині кожні два елементи є порівнюваними, тоді за теоремою 6.8 для них існують точна верхня й точна нижня грані, і лінійно впорядкована множина є решіткою за означенням. ◄

Наслідок 6.6. Частково впорядкована множина (R, $\le$) дійсних чисел з традиційним відношенням порядку є решіткою.

У решітці не може бути більше одного максимального (мінімального) елемента. Дійсно, якщо a і b – різні максимальні елементи, то вони непорівнювані між собою, тому sup{a, b} має відрізнятися від них і бути більше кожного з них. Проте це суперечить їх максимальності. Аналогічно розглядаються мінімальні елементи.

Теорема 6.9 про максимальний елемент решітки. Якщо в решітці (A, $\le$) існує максимальний елемент, то він є найбільшим. Аналогічно мінімальний елемент є найменшим.

► Припустимо, що в решітці існує максимальний елемент a. Доведемо, що він більше будь-якого іншого елемента решітки b. Припустимо, що a і b непорівнювані. Тоді з існування sup{a, b} та непорівнюваності a і b маємо $a \ne$ sup{a, b}. Тоді $a <$ sup{a, b}, що суперечить максимальності a. Із цієї суперечності випливає, що максимальний елемент решітки не менше кожного її елемента, тобто за означенням є найбільшим.

Твердження про те, що мінімальний елемент решітки є найменшим, доводиться аналогічно. ◄

Наслідок 6.7. У будь-якій непорожній скінченній решітці існують найбільший та найменший елементи.

► За теоремою 6.5 непорожня скінченна частково впорядкована множина має максимальний та мінімальний елементи. За теоремою 6.9 ці елементи є найбільшим та найменшим елементами решітки відповідно. ◄

Нескінченна решітка теж може мати найбільший та найменший елементи. Розглянемо, наприклад, відношення "ділить" (|) на множині N: $a|b$, якщо $\exists k\in N$ ($b = ka$). За цим відношенням sup{a, b} = НСК(a, b), inf{a, b} = НСД(a, b). Отже, (N, |) є решіткою, має найменший елемент 1 (1 ділить будь-яке натуральне число) і найбільший 0 (будь-яке число ділить 0).

Проте не кожна решітка має найбільший та найменший елементи. Наприклад, решітка (N, $\le$) натуральних чисел з традиційним відношенням порядку має тільки найменший елемент, а решітка (R, $\le$) дійсних чисел з традиційним відношенням порядку не має ні найбільшого, ні найменшого елементів.

6.6.3. Поняття повноти решіток

Частково впорядкована множина (A, $\le$) називається ***повною решіткою***, якщо для її довільної непорожньої підмножини $B \subseteq A$ існують sup B і inf B.

Зауважимо, що точна верхня грань усієї повної решітки є її найбільшим елементом, а точна нижня – найменшим. Отже, кожна повна решітка має

найбільший і найменший елементи, які прийнято називати ***одиницею*** й ***нулем*** решітки та позначати 1 і 0.

Приклад 6.14. Для довільної множини M частково впорядкована множина (P(M), $\subseteq$) є повною решіткою. Множина $\varnothing$ є нулем решітки, M – одиницею.

► Неважко перевірити, що для довільної непорожньої множини $A \subseteq P(M)$

sup A = {x | $\exists B\in A$ $x\in B$},

inf A = {x | $\forall B\in A$ $x\in B$}. ◄

Зауваження. Повнота решіток і повнота лінійних порядків – це цілком різні поняття.

Приклад 6.15. Звичайне лінійне упорядкування множини (N, $\le$) є повним і є решіткою, але не повною, адже в цій решітці немає найбільшого елемента. Водночас, частково впорядкована множина (P(M), $\subseteq$) для довільної множини M є повною решіткою, проте не є цілком упорядкованою, якщо M містить хоча б два елементи.

6.6.4. Прямі добутки решіток

Теорема 6.10 про прямий добуток решіток. Прямий добуток ($A\times B$, $\le$) решіток (A, $\le_A$) і (B, $\le_B$), де $\le\, = \,\le_A\times\le_B$, є решіткою.

► Прямий добуток порядків ($A\times B$, $\le$) – частково впорядкована множина. Доведемо, що в ($A\times B$, $\le$) для довільних (a_1, b_1), (a_2, b_2)$\in A\times B$

inf{(a_1, b_1), (a_2, b_2)} = (inf{a_1, a_2}, inf{b_1, b_2}),

sup{(a_1, b_1), (a_2, b_2)} = (sup{a_1, a_2}, sup{b_1, b_2}).

З означення точної нижньої грані та прямого добутку частково впорядкованих множин випливає, що (inf{a_1, a_2}, inf{b_1, b_2}) є нижньою гранню множини {(a_1, b_1), (a_2, b_2)}. Нехай (c_1, c_2) – деяка інша нижня грань множини {(a_1, b_1), (a_2, b_2)}. Тоді c_1 є нижньою гранню множини {a_1, a_2}, а c_2 – множини {b_1, b_2}. Точна нижня грань є найбільшою в множині нижніх граней, тому $c_1 \le$ inf{a_1, a_2} і $c_2 \le$ inf{b_1, b_2}. Тоді (c_1, c_2) $\le$ (inf{a_1, a_2}, inf{b_1, b_2}). Звідси випливає, що inf{(a_1, b_1), (a_2, b_2)} існує, причому inf{(a_1, b_1), (a_2, b_2)} = (inf{a_1, a_2}, inf{b_1, b_2}). Твердження щодо точної верхньої грані доводиться аналогічно. ◄

Теорема 6.11 про прямий добуток сім′ї решіток. Нехай $A = \{(A_i, \le_i)\}_{i\in I}$ – непорожня сім′я решіток множин. Тоді прямий добуток сім′ї A, ($\prod\limits_{i\in I} A_i$, $\le$) є решіткою.

► За теоремою 6.1 прямий добуток сім′ї часткових порядків є частковим порядком. Доведемо, що в ньому кожна двоелементна множина має точну верхню та точну нижню грані.

Аналогічно доведенню теореми 6.10 доведемо, що в ($\prod\limits_{i\in I} A_i$, $\le$) для довільних f_1, $f_2 \in \prod\limits_{i\in I} A_i$

inf{f_1, f_2} = {(i, inf{$f_1(i)$, $f_2(i)$}) | $i\in I$},

$\sup\{f_1, f_2\} = \{(i, \sup\{f_1(i), f_2(i)\}) \mid i\in I\}$.

Доведемо перше твердження (друге доводиться аналогічно). Нехай $f = \{(i, \inf\{f_1(i), f_2(i)\}) \mid i\in I\}$. За побудовою, $f\in \prod\limits_{i\in I} A_i$. За всіх $i\in I$ мають місце співвідношення $f(i) = \inf\{f_1(i), f_2(i)\}$, $\inf\{f_1(i), f_2(i)\} \le_i f_1(i)$ та $\inf\{f_1(i), f_2(i)\} \le_i f_2(i)$, тому f є нижньою гранню множини $\{f_1, f_2\}$. Нехай f_3 – деяка нижня грань множини $\{f_1, f_2\}$. Тоді $f_3(i) \le_i f_1(i)$ та $f_3(i) \le_i f_2(i)$ при всіх $i\in I$, звідки за означенням точної нижньої грані $f_3(i) \le_i \inf\{f_1(i), f_2(i)\}$. Це співвідношення виконується при всіх $i\in I$, тому за побудовою порядку $\le$ маємо $f_3 \le f$. Отже, f є точною нижньою гранню множини $\{f_1, f_2\}$. ◄

Наслідок 6.8. Частково впорядкована множина векторів з дійсними компонентами, $(R^n, \le_n)$, де

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le_n (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_1\le b_1 \wedge a_2\le b_2 \wedge \ldots \wedge a_n\le b_n$,

є решіткою.

► $(R^n, \le_n)$ є прямим добутком n однакових частково впорядкованих множин $(R, \le)$ дійсних чисел із традиційним відношенням порядку. Оскільки $(R, \le)$ є лінійно впорядкованою, то є решіткою. За теоремою 6.11 $(R^n, \le_n)$ є решіткою. ◄

6.7. Монотонне відображення. Нерухома точка відображення

Нехай $(A, \le_A)$, $(B, \le_B)$ – частково впорядковані множини. Відображення f з A в B називається ***монотонним***, якщо для довільних елементів $a_1, a_2\in A$ з $a_1 \le_A a_2$ випливає $f(a_1) \le_B f(a_2)$.

Наприклад, відображення $f = \{(x, x^3) \mid x\in R\}$ з $(R, \le)$ в $(R, \le)$ є монотонним. Відображення f з $(P(\{1, 2\}), \subseteq)$ в $(\{0, 1, 2\}, \le)$, де $\le$ – звичайне упорядкування, $f(\varnothing) = 0$, $f(\{1\}) = f(\{2\}) = 1$, $f(\{1, 2\}) = 2$, теж є монотонним.

Теорема 6.12 про монотонне бієктивне відображення. Якщо $(A, \le_A)$, $(B, \le_B)$ - частково впорядковані множини з найменшими елементами a_0 і b_0 відповідно, f – монотонне бієктивне відображення з A в B, то $f(a_0) = b_0$.

► З бієктивності відображення f маємо $f(f^{-1}(b_0)) = b_0$. З найменшості b_0 отримуємо $b_0 \le f(a_0)$, з найменшості a_0 – $a_0 \le f^{-1}(b_0)$. Припустимо, що $f(a_0) > b_0$. Тоді за монотонністю f необхідно виконується $b_0 < f(a_0) \le (f^{-1}(b_0)) = b_0$. Отримана суперечність завершує доведення. ◄

Відображення, обернене до монотонного бієктивного відображення, може не бути монотонним. Наприклад, нехай $(A, \le_A)$, $(B, \le_B)$ – частково впорядковані множини, де $A = B = N_+$, $x \le_A y \Leftrightarrow x|y$ ("x ділить y"), $\le_B$ – традиційний порядок на множині натуральних чисел. $f = i_{N_+}$ є монотонною бієкцією між A і B. Проте відображення f^{-1} не є монотонним: $2 \le_B 3$, але $f^{-1}(2)$ і $f^{-1}(3)$ непорівнювані в A.

Твердження 6.6. Якщо $(A, \le_A)$ – лінійно впорядкована множина, $(B, \le_B)$ – частково впорядкована множина, f – монотонне бієктивне відображення з A в B, то порядок $\le_B$ є лінійним і f^{-1} є монотонним відображенням.

► Доведемо, що порядок $\le_B$ є лінійним:

$b_1\in B \wedge b_2\in B \Rightarrow f^{-1}(b_1)\in A \wedge f^{-1}(b_2)\in A \Rightarrow^{(\le_A \text{ лінійний})}$

$\Rightarrow (f^{-1}(b_1) \le_A f^{-1}(b_2)) \vee (f^{-1}(b_2) \le_A f^{-1}(b_1)) \Rightarrow^{(\text{монотонність})}$

$\Rightarrow (f(f^{-1}(b_1)) \le_B f(f^{-1}(b_2))) \vee (f(f^{-1}(b_2)) \le_B f(f^{-1}(b_1))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b_1 = f(f^{-1}(b_1)) \le_B f(f^{-1}(b_2)) = b_2) \vee (b_2 = f(f^{-1}(b_2)) \le_B f(f^{-1}(b_1)) = b_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b_1 \le_B b_2) \vee (b_2 \le_B b_1)$.

Доведемо монотонність f^{-1}:

$(b_1 <_B b_2) \wedge (f^{-1}(b_2) <_A f^{-1}(b_1)) \Rightarrow (b_1 <_B b_2) \wedge (f(f^{-1}(b_2)) \le_B f(f^{-1}(b_1))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b_1 <_B b_2) \wedge (b_2 \le_B b_1) \Leftrightarrow$ F.

Отже, якщо $b_1 <_B b_2$, то $f^{-1}(b_1) \le_A f^{-1}(b_2)$. Якщо $b_1 = b_2$, то $f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2)$. В обох випадках з $b_1 \le_B b_2$ випливає $f^{-1}(b_1) \le_A f^{-1}(b_2)$. ◄

Елемент $a\in A$ називається ***нерухомою точкою*** відображення $f: A\to A$, якщо $f(a) = a$.

Теорема 6.13 про нерухому точку відображення повної решітки. Будь-яке монотонне відображення f повної решітки $(L, \le)$ в себе має нерухому точку.

► Припустимо, що монотонне відображення f не має нерухомих точок. Решітка $(L, \le)$ є повною, тому має найбільший та найменший елементи, нехай a та b, відповідно. З монотонності та припущення маємо $a < f(a) \le f(b) < b$.

Розглянемо множину $A = \{x \mid f(x) < x\}$. За попереднім, $b\in A$, тому множина A непорожня й існує $x_0 = \inf A$, тобто $\forall x\in A\ x_0 \le x$. За монотонністю f маємо $\forall x\in A\ f(x_0) \le f(x)$. Проте $\forall x\in A\ f(x) < x$, звідки за транзитивністю $\forall x\in A\ f(x_0) < x$. Отже, $f(x_0)$ – нижня грань множини A.

Точна нижня грань є найбільшою серед ніжніх граней, тому, прпустивши відсутність нерухомих точок, маємо $f(x_0) < x_0$, а тоді $x_0 \in A$. За монотонністю f та відсутністю нерухомих точок отримаємо також $f(f(x_0)) < f(x_0)$. Отже, $f(x_0) \in A$ і $x_0 = \inf A \le f(x_0)$. Отримана суперечність доводить наявність нерухомих точок у монотонного відображення на повній решітці. ◄

Наслідок 6.9. Якщо відображення $f: [a; b]\to[a; b]$, де $a, b\in R$, $a < b$, є монотонно неспадним на відрізку $[a; b]$, то рівняння $f(x) = x$ має хоча б один розв'язок.

Задачі

6.1. Довести, що якщо для елементів частково впорядкованої множини A виконується $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_1$, то $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

6.2. Означимо на множині R дійсних чисел відношення T: aTb тоді й тільки тоді, коли $a/(a^2+1) \le b/(b^2+1)$, $a, b\in R$. Довести, що:

а) T не є відношенням часткового порядку на всій множині R;

б) T є відношенням часткового порядку на множині дійсних чисел з інтервалу $[1;\infty)$;

в) T є відношенням часткового порядку на множині дійсних чисел з інтервалу $(-\infty;-1]$.

6.3. Чи є відношення $\leq$, задане на множині $N\times N$, частковим порядком, якщо $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a\cdot d \leq b\cdot c$?

6.4. Довести, що для лінійно впорядкованих множин $(A, \leq_A)$ і $(B, \leq_B)$ прямий добуток порядків є лінійним порядком на $A\times B$ тоді й тільки тоді, коли $N(A) = 1$ або $N(B) = 1$.

6.5. Нехай A – непорожня множина і P – множина всіх часткових порядків на A. Для $R_1, R_2\in P$ покладемо $R_1 \leq R_2$ тоді й тільки тоді, коли $R_1\subseteq R_2$. Довести, що відношення $\leq$ є частковим порядком на P.

6.6. Означимо відношення R на множині N^2: $(a, b)R(c, d)$ тоді й тільки тоді, коли $a \leq c$ і $b \geq d$. Чи є відношення R відношенням: а) часткового; б) лінійного порядку?

6.7. На булеані $P(M)$ множини M означимо відношення R: $(A, B)\in R$ тоді й тільки тоді, коли існує бієкція між множинами A і B, $A, B\in P(M)$. Чи буде відношення R відношенням часткового порядку на $P(M)$?

6.8.* Нехай на множині N^n, $n\in N_+$, введено порядок $\leq_{(n)}$, який є прямим добутком традиційних порядків $\leq$ на множині натуральних чисел. Довести, що довільна множина $M \subseteq N^n$, усі елементи якої попарно непорівнювані, є скінченною.

6.9. Довести, що в множині N^n, $n \geq 2$, з порядком $\leq_{(n)}$ для довільного натурального числа m, $m \geq 2$, існує m-елементна множина, всі елементи якої попарно непорівнювані.

6.10. Довести, що скінченна частково впорядкована множина має найменший елемент тоді й тільки тоді, коли вона містить рівно один мінімальний елемент. Чи справджується це для нескінченних частково впорядкованих множин?

6.11. Довести, що скінченна частково впорядкована множина має найбільший елемент тоді й тільки тоді, коли вона містить рівно один максимальний елемент. Чи справджується це для нескінченних частково впорядкованих множин?

6.12. На множині $\overline{1,k}$ $(k\in N_+)$ означено частковий порядок R за допомогою відношення "ділить", тобто nRm тоді й тільки тоді, коли $n|m$. Чи існують у множині $\overline{1,k}$ найменший та найбільший елементи? Чи є в множині $\overline{1,k}$ мінімальні та максимальні елементи, і якщо є, то визначити їхню кількість.

6.13.* Довести, що множина мінімальних елементів непорожньої підмножини частково впорядкованої множини $(N^n, \leq_n)$, $n\in N_+$, скінченна.

6.14. Довести, що множина $(N, \leq)$, де $0 < 2 < 4 < \ldots < 1 < 3 < 5 \ldots$ є цілком упорядкованою.

6.15. Довести, що множина $(Z, \leq)$, де $1 < 2 < 3 < \ldots < 0 < -1 < -2 < -3 < \ldots$ є цілком упорядкованою.

6.16. Довести, що множина $(N, \leq)$, де $\ldots < 4 < 3 < 2 < 1$ не є цілком упорядкованою.

6.17. Довести, що будь-яка непорожня скінченна лінійно впорядкована множина є цілком упорядкованою.

6.18. Чи буде цілком упорядкованою:

а) множина $(Q, \leq)$ раціональних чисел з традиційним відношенням порядку;

б) множина $(R, \leq)$ дійсних чисел з традиційним відношенням порядку;

в) множина чисел вигляду $1-1/n$, де $n\in N$ з традиційним відношенням порядку?

6.19.* Довести, що лінійно впорядкована множина є скінченною тоді й тільки тоді, коли вона є цілком упорядкованою відносно заданого та відносно двоїстого порядків.

6.20. Довести, що частково впорядкована множина $(N_+, \leq)$, де $a \leq b \Leftrightarrow a|b$, є решіткою.

6.21. Довести, що в будь-якій решітці $(L, \leq)$ для довільних елементів a, b, c, $d\in L$ виконується:

а) $a\leq c \wedge b\leq c \Rightarrow \sup\{a, b\} \leq c$;

б) $c\leq a \wedge c\leq b \Rightarrow c \leq \inf\{a, b\}$;

в) $a\leq b \Leftrightarrow \sup\{a, b\} = b$;

г) $a\leq b \Leftrightarrow \inf\{a, b\} = a$;

д) $a\leq c \wedge b\leq d \Rightarrow \sup\{a, b\} \leq \sup\{c, d\}$;

е) $a\leq c \wedge b\leq d \Rightarrow \inf\{a, b\} \leq \inf(c, d)$;

є) $a\leq c \Rightarrow \sup\{a, \inf\{b, c\}\} \leq \inf\{\sup\{a, b\}, c\}$;

ж) $\sup\{a, b\} = \inf\{a, b\} \Rightarrow a = b$;

з) $\sup\{a,\sup\{b, c\}\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\}$;

и) $\sup\{a,\sup\{b, c\}\} = \sup\{a, b, c\}$;

і) $\sup\{\sup\{a, b\}, c\} = \sup\{a, b, c\}$;

ї) $\inf\{a,\inf\{b, c\}\} = \inf\{\inf\{a, b\}, c\}$;

й) $\inf\{a,\inf\{b, c\}\} = \inf\{a, b, c\}$;

к) $\inf\{\inf\{a, b\}, c\} = \inf\{a, b, c\}$;

л) $\sup\{\inf\{a, b\}, a\} = a$;

м) $\inf\{\sup\{a, b\}, a\} = a$;

н) $\inf\{a, \sup\{b, c\}\} \geq \sup\{\inf\{a, b\}, \inf\{a, c\}\}$;

о) $\sup\{a, \inf\{b, c\}\} \leq \inf\{\sup\{a, b\}, \sup\{a, c\}\}$.

6.22. Нехай $(L, \leq)$ – решітка, $\{a\}\subset A\subseteq L$ і існує $\inf A$. Довести, що $\inf A = \inf\{\inf (A\backslash\{a\}), a\}$.

6.23. Нехай $(L, \leq)$ – решітка, $\{a\}\subset A\subseteq L$ і існує $\sup A$. Довести, що $\sup A = \sup\{\sup (A\backslash\{a\}), a\}$.

6.24. Нехай $(L, \leq)$ – решітка, $\varnothing\subset A\subseteq B\subseteq L$ і існує $a = \inf A$, який є нижньою гранню множини B. Довести, що існує $\inf B$, причому $\inf B = \inf A$.

6.25. Нехай $(L, \le)$ – решітка, $\varnothing \subset A \subseteq B \subseteq L$ і існує $a = \sup A$, який є верхньою гранню множини B. Довести, що існує $\sup B$, причому $\sup B = \sup A$.

6.26. Довести, що частково впорядкована множина $(L, \le)$ є решіткою тоді й тільки тоді, коли для довільної скінченної непорожньої підмножини $A \subseteq L$ існують $\sup A$ і $\inf A$.

6.27. Чи буде повною решіткою множина A^* всіх слів в алфавіті A з лексикографічним порядком?

6.28. Довести, що множина всіх дільників натурального числа n, частково впорядкована за відношенням "ділить", є повною решіткою. Визначити нуль і одиницю цієї решітки.

6.29. Чи утворює повну решітку впорядкована за відношенням включення множина всіх:

а) рефлексивних,

б) антирефлексивних,

в) симетричних,

г) антисиметричних,

д) транзитивних

відношень на заданій множині M?

6.30. Нехай W – множина всіх еквівалентностей на множині M. Довести, що множина $(W, \subseteq)$ є решіткою.

6.31.* На множині P всіх можливих розбиттів деякої множини M на непорожні класи означимо відношення $\le$: $P_1 \le P_2$ тоді й тільки тоді, коли P_1 є підрозбиттям P_2. Довести, що множина $(P, \le)$ є решіткою.

6.32. Чи буде повною решіткою множина чисел з традиційним відношенням порядку:

а) $\{1\text{-}1/n \mid n \in N_+\}$;

б) $\{1/n \mid n \in N_+\}$;

в) усіх раціональних чисел з сегменту [0;1]?

6.33. Довести, що частково впорядкована множина $(A, \le)$ є повною решіткою тоді й тільки тоді, коли вона має найбільший елемент і для будь-якої непорожньої підмножини $B \subseteq A$ існує $\inf B$.

6.34. Довести, що частково впорядкована множина множина $(A, \le)$ є повною решіткою тоді й тільки тоді, коли вона має найменший елемент і для будь-якої непорожньої підмножини $B \subseteq A$ існує $\sup B$.

6.35. Нехай $(A, \le)$ – цілком упорядкована множина. Довести, що не існує такого монотонного бієктивного відображення $f: A \to A$, що для деякого елемента $a \in A$ виконується $f(a) < a$.

6.36. Нехай f, g – монотонні перетворення частково впорядкованої множини $(M, \le)$. Довести, що монотонними є перетворення:

а) $f \circ g$,

б) $f^{(n)}$, $n \in N_+$.

Відповіді, вказівки, розв′язання

Відповіді

Глава 1

1.1. в) $(77|n) \sim (7|n) \wedge (11|n)$[23]; г) $(77|n) \to (7|n) \wedge (11|n)$. **1.3**. а) $\exists x\, P(x)$; б) $\forall x\, \forall y\ (P(x) \wedge P(y) \to (x=y))$; г) $\exists x\, \exists y\ (P(x) \wedge P(y) \wedge (x \ne y))$. **1.4**. а) $\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \to (\exists t\, (R(t) \wedge Q(t, x) \wedge Q(t, y) \wedge Q(t, z))$, де $P(x)$ – "x є точкою простору", $R(x)$ – "x є площиною простору", $Q(t, x)$ – "x лежить на t".

Глава 2

2.1. Множини A, B, D попарно рівні. Множини A, B, C, D, складаються з трьох елементів кожна. Множина E складається з двох елементів. **2.2**. Множина A не містить жодного елемента, множини B і C містять по одному елементу. **2.3**. а), в), є), и). **2.4**. в). **2.5**. а), б), д), е). **2.10**. $A_1 = \{1\}$; $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$, $n \in N_+$. **2.21**. $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. **2.24**. а) $A \setminus B = (A \div B) \cap A$, $A \cup B = (A \div B) \div (A \cap B)$; б) $A \setminus B = (A \cup B) \div B$, $A \cap B = (A \div B) \div (A \cup B)$; в) $A \cap B = A \setminus (A \div B)$, $A \cup B = (A \setminus B) \div (B \setminus A)$. **2.26**. $X = B \cup (C \setminus A)$. **2.27**. $X = C \setminus B$. **2.28**. $X = (A \setminus B) \cup C$. **2.30**. $I = \{1, 2\}$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $B_1 = \{2\}$, $B_2 = \{1\}$. **2.33**. $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = (\bigcup\limits_{i \in I} A_i) \setminus \bigcup\limits_{j \in I} ((\bigcup\limits_{i \in I} A_i) \setminus A_j)$. **2.34**. $A_0 = \{1\}$, $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{2n} = \{1, 2\}$, $A_{2n+1} = = \{1, 2, 3\}$, $n \in N_+$.

Глава 3

3.3. $A = D = \varnothing$, $B = C = \{1\}$. **3.11**. $A = B = \{1, 2\}$, $C = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $D_1 = \{1\}$, $D_2 = \{2\}$. **3.12**. $A = B = D = \{1, 2\}$, $C_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $C_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$. **3.13**. $A = B = \{1, 2\}$, $D_1 = \{1\}$, $D_2 = \{2\}$ а) $C = \{(1, 1), (2, 1)\}$, б) $C = = \{(1, 1), (1, 2)\}$. **3.14**. $A = B = D = \{1, 2\}$, $C_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $C_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$. **3.25**. а) $\{(x, y) \mid x=y \wedge x \ge 0\}$; б) $\{(x, y) \mid y=|x+1|\}$. **3.31**. $A = B = H = \{1, 2\}$, $C_1 = \{(1, 1)\}$, $C_2 = \{(2, 1)\}$, $F = \{(1, 1), (1, 2)\}$. **3.32**. $A = B = G = H = \{1, 2\}$, $C_1 = \{(1, 1)\}$, а) $C_2 = \{(1, 2)\}$, $D = \{(1, 1), (2, 1)\}$; б) $C_2 = \{(2, 1)\}$, $F = \{(1, 1), (1, 2)\}$.

Глава 4

4.1. а) C_1, C_2, C_3, C_4; б) C_3; в) C_3; г) C_1, C_2, C_3, C_4. **4.2**. а) Так. б), в), г) Ні. Контрприклад: $A = B = \{1, 2\}$, $C_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$. б) $C_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, в) $C_2 = \{(1, 1), (2, 1)\}$, г) $C_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$. **4.3**. а) Так. б), в), г) Ні. Контрприклад: $A = B = \{1, 2\}$, $C_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$. б) $C_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, в) $C_2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$, г) $C_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$. **4.4**. б), в) Так. а), г) Ні. Контрприклад: $A = B = \{1, 2\}$, $C_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $C_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$. **4.5**. б), в) Так. а), г) Ні. Контрприклад: $A = B = \{1, 2\}$, $C_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $C_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$. **4.11**. $A = B = F = \{1, 2, 3\}$. а) $C_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$, $C_2 = \{(2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$; б, в) $C_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$, $C_2 = \{(2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$; г) $C_1 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$, $C_2 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;

[23] запис $a|b$ означає "a ділить b"

д) $C_1 = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, $C_2 = \{(1, 1), (2, 1)\}$. **4.27**. $C = \{(1, 7), (2, 7), (2, 8), (3, 8)\}$. **4.28**. $C = \{(7, 1), (7, 2), (8, 2), (8, 3)\}$. **4.39**. $c^{-1}(n) = (l(n), r(n))$, де $l(n) = n\text{-}(\varphi(n))(\varphi(n)+1)/2$, $l(n)+r(n) = \varphi(n) = \left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]$.

Глава 5

5.1. а) R_1, R_3, R_9; б) R_2, R_4, R_{11}; в) R_1, R_2, R_6, R_7, R_8; г) R_4, R_9, R_{11}; д) R_1, R_4, R_5, R_7, R_9, R_{10}, R_{11}. **5.4**. $(n^2+n)/2$. **5.20**. $R = \{(a_i, a_{i+1}) \mid i \in \overline{1, n-1}\}$ при $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Глава 6

6.3. Ні. **6.6**. а) Так. б) Ні. **6.7**. Якщо множина M містить не більше одного елемента, то так, інакше – ні. **6.10**. Ні. **6.12**. 1 є найменшим та єдиним мінімальним елементом. При $k \leq 2$ існує найбільший (він же єдиний максимальний елемент) k. При $k>2$ найбільшого елемента немає, але є $[(k+1)/2]$ максимальних. **6.18**. а), б) ні; в) так. **6.27**. Ні. **6.28**. Нулем решітки є число 1, одиницею - число n. **6.29**. а), б), в), д) так; г) ні. **6.32**. а), б), в) ні.

Вказівки

Глава 2

2.8. Використати метод доведення задачі 2.7 і математичну індукцію. **2.9**. Скористайтеся розв'язанням (або результатом) прикладу 2.13 та критерієм рівності множин. **2.10**. Побудуйте множини A_n, $n \in N_+$, індукцією за n і доведіть, що вони задовольняють умову задачі. **2.15**. Для доведення спростити обидві частини тотожності. **2.19**. Скористатися індукцією за кількістю множин n. При індукційному переході варто скористатися співвідношенням $x \in A_1 \div A_2 \div \ldots \div A_n \div A_{n+1} \Leftrightarrow x \in (A_1 \div A_2 \div \ldots \div A_n) \div A_{n+1} \Leftrightarrow (x \in A_1 \div A_2 \div \ldots \div A_n \wedge x \notin A_{n+1}) \vee (x \notin A_1 \div A_2 \div \ldots \div A_n \wedge x \in A_{n+1})$ і припущенням індукції. **2.27**. Аналогічно задачі 2.26 як універсум можна взяти множину C. Довести, що за умови $B \subseteq A$ виконується $B \subseteq A \setminus X \Leftrightarrow X \subseteq \overline{B}$. Далі аналогічно до задачі 2.26 отримуємо еквівалентну систему $\begin{cases} A \cap \overline{B} \subseteq X \subseteq \overline{B}, \\ C \cap \overline{A} \subseteq X \subseteq C. \end{cases}$ Далі див.розв'язання задачі 2.26. **2.28**. Довести, що як універсум можна взяти множину $A \cup C$. Далі (див. розв'язання задачі 2.27) отримуємо еквівалентну систему $\begin{cases} A \cap \overline{B} \subseteq X \subseteq \overline{B}, \\ C \subseteq X \subseteq C \cup A. \end{cases}$ **2.29**. Див. приклади а) 2.14 ;б) 2.15 ;в) 2.16. **2.32**. Див. приклад 2.18.

Глава 3

3.1. Див. доведення теореми 3.1. **3.2**. *Перший спосіб*. Довести тотожності безпосередньо (див., напр., доведення теореми 3.1). *Другий спосіб*. Провести рівносильні перетворення на основі тотожностей з теореми 3.1. **3.3**. Використати задачу 3.2а. **3.6**. Див. доведення теореми 3.2. **3.7**. Див. доведення пп. 1, 6 теореми 3.3. **3.8**. Див. доведення п. 6 теореми 3.3. **3.9**. Використати тотожність $B \div C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ і

теорему 3.6. **3.10**. Див. доведення теореми 3.7. **3.11**. Див. доведення теореми 3.8. **3.12**. Див. доведення теореми 3.8. **3.13**. Скористайтесь тотожністю $D_1 \div D_2 = (D_1 \setminus D_2) \cup (D_2 \setminus D_1)$ та теоремою 3.8. **3.14**. Скористайтесь тотожністю $C_1 \div C_2 = (C_1 \setminus C_2) \cup (C_2 \setminus C_1)$ та теоремою 3.8. **3.15**. Див. доведення теореми 3.8. **3.16**. Див. доведення теореми 3.8. **3.17**. Див. доведення теореми 3.8. **3.18**. Див. доведення теореми 3.8. **3.20**. *Перший спосіб*: аналогічно п. 1 твердження 3.5. *Другий спосіб*: використати п. 1 твердження 3.5 для оберненої відповідності та п. 3 теореми 3.3. **3.22**. *Перший спосіб*. Скористатися задачею 3.21. **3.24**. Аналогічно до задачі 3.23 скористайтеся теоремою 3.7 і твердженням 3.5. **3.26**. Див. доведення теореми 3.9. **3.28**. Див. доведення теореми 3.10. **3.29**. Див. доведення теореми 3.11. **3.30**. Застосуйте теорему 3.11. **3.31**. Див. доведення теореми 3.12. **3.32**. Скористайтесь тотожністю $C_1 \div C_2 = (C_1 \setminus C_2) \cup (C_2 \setminus C_1)$ та теоремою 3.12. **3.33**. Див. доведення теореми 3.12. **3.34**. Див. доведення теореми 3.13.

Глава 4

4.8. Скористатися доведенням задачі 4.7 і врахувати, що за умови $f_1(x) \neq f_2(x)$ множина $(f_1 \cap f_2)(x)$ порожня. **4.9**. Урахувати, що за умови $f_1 \cap f_2 \neq \varnothing$ існує x_0, при якому $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, звідки $f_1 \setminus f_2$ не всюди визначена. **4.13**. Див. розв'язання задачі 4.12. **4.15**. Див. розв'язання задачі 4.14. **4.18**. Див. розв'язання задачі 4.17. **4.20**. За допомогою задачі 4.19 доведіть, що відповідність C^{-1} є функціональною та скористайтесь твердженням 4.2. **4.22**. За допомогою задачі 4.21 доведіть, що відповідність C^{-1} є функціональною та скористайтесь твердженням 4.2. **4.24**. За допомогою задачі 4.23 доведіть, що відповідність C^{-1} є функціональною та скористайтесь твердженням 4.2. **4.26**. За допомогою задачі 4.25 доведіть, що відповідність C^{-1} є функціональною та скористайтесь твердженням 4.2. **4.30**. Доведіть, що відповідність $\varphi = \{((a, (b, c)), ((a, b), c)) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$ є бієкцією між множинами $A \times (B \times C)$ і $(A \times B) \times C$. **4.31**. Доведіть, що відповідність $\varphi = \{((a_1, a_2, \ldots, a_k), \{(i, a_i) \mid i \in \overline{1,k}\}) \mid (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A^k\}$ є бієкцією між множинами $A \times (B \times C)$ і $(A \times B) \times C$. **4.33**. Доведіть, що $\psi = \{(f, h) \mid f \in \prod_{i \in I} A_i \wedge h = \{(i, f(\varphi(i))) \mid i \in I\}\}$ є бієкцією між $\prod_{i \in I} A_i$ і $\prod_{i \in I} A_{\varphi(i)}$. **4.34**. Див. приклад 4.6. **4.35**. Див. приклад 4.7. **4.36**. Нехай f і h – ін'єктивні відображення між A і C та між B і D відповідно і $c_0 \in C$. Аналогічно прикладу 4.8 доведіть, що $\varphi = \{((g, (h^{-1} \circ g \circ f) \cup \{(x, c_0) \mid x \in D \setminus \mathrm{Pr}_2\, h\} \mid g \in A^B\}$ є ін'єктивним відображенням з A^B в C^D. **4.37**. Доведіть, що $\varphi = f \cup h$ є бієкцією між множинами $A \cup B$ і $C \cup D$. **4.38**. Доведіть, що $\varphi = f \cup \{(x, y) \mid x \in B \setminus A \wedge (x, y) \in h\}$ є ін'єктивним відображенням з $A \cup B$ в $C \cup D$. **4.39**. Побудуйте вираз, який за канторовим номером дає суму компонент пари та скористайтесь тим, що $x = n\text{-}(x+y)(x+y+1)/2$ за $c(x, y) = n$.

Глава 5

5.5. Використати критерій симетричності. **5.13**. Скористайтеся задачами 5.6 і 5.12. **5.15**. Рефлексивно-транзитивне замикання зберігає симетричність та є рефлексивним і транзитивним відношенням. **5.16**. Рефлексивно-транзитивне замикання зберігає симетричність та є рефлексивним і транзитивним відношенням. $(R_1 \circ R_2) \cup (R_2 \circ R_1)$ є симетричним за задачею 5.5. **5.18**. Доведіть, що $R_1 \cup R_2$ є симетричним відношенням. Далі аналогічно задачі 5.17. **5.19**. Аналогічно задачі 5.18. **5.20**. Шукане відношення R повинно бути антирефлексивним і не перетинатися з R^{-1}. За задачею 5.17 найменшою еквівалентністю, яка включає R, є $(R \cup R^{-1})^*$. Оскільки $(R \cup R^{-1})^* = A \times A$, кожні два елементи $a, b \in A$ можна "з'єднати" ланцюжком $a\, R_1\, a_1\, R_1\, a_2\, R_1 \ldots R_1\, b$, де $R_1 = R \cup R^{-1}$. Це означає, що на діаграмі відношення R кожні два елементи множини A зв'язані деяким маршрутом. Далі індукцією за кількістю елементів n множини A слід довести, що кількість стрілок на діаграмі (тобто кількість елементів відношення R) не може бути менше n-1. **5.21**. Доведення випливає безпосередньо з п. 2 теореми 5.13. **5.22**. Доведення випливає безпосередньо із задачі 5.21 і п. 2 теореми 5.13.

Глава 6

6.1. Скористайтеся індукцією за n, транзитивністю та антисиметричністю $\leq$. **6.2**. в) аналогічно б). **6.5**. Перевірте рефлексивність, антисиметричність і транзитивність $\leq$. **6.6**. а) $R = \leq \times \geq$. б) Див. розв'язання задачі 6.4. **6.7**. Якщо в M є два різних елементи $a, b \in M$, то $\{a\} R \{b\}$ і $\{b\} R \{a\}$, але $\{a\} \neq \{b\}$ і порушено умову антисиметричності. **6.9**. Розглянути множину n-ок натуральних чисел, в яких сума перших двох компонент дорівнює m-1, а решта – нулю. **6.11**. Див. задачу 6.10. **6.13**. Скористайтеся задачею 6.8. **6.16**. Скористайтеся теоремою 6.6. **6.17**. Кожна скінченна множина задовольняє умову обриву спадних ланцюгів, тому є фундованою. Фундована лінійно впорядкована множина є цілком упорядкованою. **6.20**. Доведіть, що $\inf\{a, b\}$ = НСД(a, b), $\sup\{a, b\}$ = НСК(a, b). **6.22**. Див. спосіб доведення задачі 6.21 й). **6.23**. Див. задачу 6.22. **6.25**. Див. задачу 6.24. **6.26**. ($\Rightarrow$) Доведіть, що $\sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\} = \sup\{\sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\}$ і скористайтесь індукцією за кількістю елементів множини A. ($\Leftarrow$) Множина з будь-яких двох елементів є скінченною й непорожньою. **6.27**. У ній немає найбільшого елемента. **6.28**. Доведіть, що $\inf\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ = НСД$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $\sup\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ = НСК$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. **6.29**. а), б), в) Об'єднання та перетин зберігають рефлексивність, антирефлексивність, симетрічність. Доведіть, що $\sup A = \{x \mid \exists B \in A\ x \in B\}$, $\inf A = \{x \mid \forall B \in A\ x \in B\}$. д) Перетин зберігає транзитивність. Доведіть, що $\sup A = (\{x \mid \exists B \in A\ x \in B\})^+$, $\inf A = \{x \mid \forall B \in A\ x \in B\}$. г) Для $M = \{1, 2\}$ у частково впорядкованій множині $(P(M \times M), \subseteq)$, звуженням якої є множина всіх антисиметричних на M відношень, кожна верхня грань множини $\{\{(1, 2)\}, \{(2, 1)\}\}$ необхідно включає не антисиметричне відношення $\{(1, 2), (2, 1)\}$, а отже не є антисиметричною. Тому множина $\{\{(1, 2)\}, \{(2, 1)\}\}$ взагалі не має верхніх граней у множині антисиметричних відношень, а отже не має й точної верхньої грані. **6.30**. Використайте задачу 6.29. **6.31**. Доведіть, що $\leq$

є частковим порядком на P. Далі доведіть, що розбиття $P' = M/R$, де $R = R_1 \cap R_2$, $P_1 = M/R_1$, $P_2 = M/R_2$, є точною нижньою гранню для $\{P_1, P_2\}$; розбиття $P'' = M/R$, де $R = (R_1 \cup R_2)^*$, $P_1 = M/R_1$, $P_2 = M/R_2$, є точною верхньою гранню для $\{P_1, P_2\}$. Див. також задачу 6.30. **6.32**. а) У ній немає найбільшого елемента. б) У ній немає найменшого елемента. в) Нехай строго зростаюча послідовність раціональних чисел $(a_i)_{i \in N}$ з сегменту [0; 1] прямує до ірраціонального числа $\alpha \in [0; 1]$; тоді множина $\{a_i \mid i \in N\}$ не має точної нижньої грані серед раціональних чисел сегменту [0; 1]. **6.34**. Див. задачу 6.33. **6.36**. б) Використайте математичну індукцію та п. *а*).

Розв′язання

Глава 2

2.6. Оскільки для довільної множини A виконується $\varnothing \subseteq A$, то за критерієм рівності множин $A = \varnothing$.

2.7 За транзитивністю включення зі співвідношення $A \subseteq B \subseteq C$ випливає, що $A \subseteq C$. Оскільки за умовою $C \subseteq A$, то за критерієм рівності виконано $A = C$. Тоді з умови $A \subseteq B$ отримуємо $C \subseteq B$ і знов за критерієм рівності множин $B = C$. За транзитивністю рівності отримуємо $A = B = C$.

2.11. а) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B$;

б) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A$;

в) $x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in A \vee x \in C \Rightarrow^{(A \subseteq B)} x \in B \vee x \in C \Leftrightarrow x \in B \cup C$;

г) $x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in C \Rightarrow^{(A \subseteq B)} x \in B \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in B \cap C$;

д) $x \in A \setminus C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \Rightarrow^{(A \subseteq B)} x \in B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in B \setminus C$;

е) $x \in C \setminus B \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin B \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin B \wedge (x \in A \vee$
$\vee\, x \notin A) \Leftrightarrow (x \in C \wedge x \notin B \wedge x \in A) \vee (x \in C \wedge x \notin B \wedge x \notin A) \Rightarrow^{(A \subseteq B)} (x \in C \wedge$
$\wedge\, x \notin B \wedge x \in B) \vee (x \in C \wedge x \notin B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee (x \in C \wedge x \notin B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in C \wedge x \notin A \Leftrightarrow x \in C \setminus A$;

2.13. а) $x \in A \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$;

б) $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee$
$\vee\, (x \in B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus C$;

в) $x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathrm{F} \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$;

г) $x \in A \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathrm{F} \vee (x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \setminus B$;

д) $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge$
$\wedge\, (x \in A \wedge x \notin C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$;

е) $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee$
$\vee\, (x \in A \wedge x \notin C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cap C)$;

є) $x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C) \Leftrightarrow x\in A\cap B \wedge \neg(x\in A\cap C) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \wedge$
$\wedge \neg(x\in A \wedge x\in C)) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B \wedge (x\notin A \vee x\notin C) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B \wedge x\notin A) \vee$
$\vee (x\in A \wedge x\in B \wedge x\notin C) \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee (x\in A \wedge x\in B \wedge x\notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \wedge x\notin C \Leftrightarrow x\in A\cap B \wedge x\notin C \Leftrightarrow x\in(A\cap B)\setminus C$;
ж) $x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C) \Leftrightarrow x\in A\setminus B \wedge x\in A\setminus C \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B) \wedge (x\in A \wedge x\notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \wedge x\notin C \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B) \wedge x\notin C \Leftrightarrow x\in A\setminus B \wedge x\notin C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\setminus C$;
з) $x\in A\cap(\overline{A}\cup B) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in \overline{A}\cup B \Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in \overline{A} \vee x\in B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge ((x\in U \wedge x\notin A) \vee x\in B) \Leftrightarrow (x\in A \wedge (x\in U \wedge x\notin A)) \vee$
$\vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B \Leftrightarrow x\in A\cap B$.

2.14. е) $x\in A\setminus(A\div B) \Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in A\div B) \Leftrightarrow x\in A \wedge \neg((x\in A \wedge x\notin B) \vee$
$\vee (x\notin A \wedge x\in B)) \Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in A \wedge x\notin B) \wedge \neg(x\notin A \wedge x\in B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge (x\notin A \vee x\in B) \wedge (x\in A \vee x\notin B) \Leftrightarrow ((x\in A \wedge x\notin A) \vee$
$\vee (x\in A \wedge x\in B)) \wedge (x\in A \vee x\notin B) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \vee (x\in A \wedge x\in B)) \wedge (x\in A \vee x\notin B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \wedge (x\in A \vee x\notin B) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B \wedge x\in A) \vee$
$\vee (x\in A \wedge x\in B \vee x\notin B) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B \Leftrightarrow x\in A\cap B$;
є) $x\in A\div(A\cap B)\Leftrightarrow(x\in A \wedge \neg(x\in A\cap B)) \vee (x\notin A \wedge x\in A\cap B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x\in A \wedge \neg(x\in A \wedge x\in B)) \vee (x\notin A \wedge x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow (x\in A \wedge$
$\wedge (x\notin A \vee x\notin B)) \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow x\in A \wedge (x\notin A \vee x\notin B) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin A) \vee$
$\vee (x\in A \wedge x\notin B) \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee (x\in A \wedge x\notin B) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \Leftrightarrow x\in A\setminus B$;
ж) $x\in(A\div B)\cap A \Leftrightarrow x\in A\div B \wedge x\in A \Leftrightarrow ((x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\notin A \wedge x\in B)) \wedge$
$\wedge x\in A \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B \wedge x\in A) \vee (x\notin A \wedge x\in B \wedge x\in A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B) \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \Leftrightarrow x\in A\setminus B$.

2.17. $A\cap\overline{B}=\varnothing \Leftrightarrow \forall x\, \neg(x\in A\cap\overline{B}) \Leftrightarrow \forall x\, \neg(x\in A \wedge x\in\overline{B}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x\, \neg(x\in A \wedge x\in U \wedge x\notin B) \Leftrightarrow \forall x\, (\neg(x\in A \wedge x\in U) \vee x\in B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x\, (x\in A\cap U \to x\in B) \Leftrightarrow^{(A\cap U=A)} \forall x\, (x\in A \to x\in B) \Leftrightarrow A\subseteq B$.

2.18. а) ($\Rightarrow$) Оскільки $x\in A\Rightarrow^{(A\subseteq B\cap C)} x\in B\cap C \Leftrightarrow x\in B \wedge x\in C$, то $x\in A\Rightarrow x\in B$ і $x\in A\Rightarrow x\in C$, звідки $A\subseteq B$ і $A\subseteq C$.
($\Leftarrow$) $x\in A \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in A \Rightarrow^{(A\subseteq B \text{ і } A\subseteq C)} x\in B \wedge x\in C \Leftrightarrow x\in B\cap C$;
д) ($\Rightarrow$) $x\in C \Rightarrow x\in(A\cap B)\cup C \Leftrightarrow^{((A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C))} x\in A\cap(B\cup C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in(B\cup C) \Rightarrow x\in A$. ($\Leftarrow$) $x\in(A\cap B)\cup C \Leftrightarrow x\in A\cap B \vee x\in C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \vee x\in C \Leftrightarrow^{(\text{оскільки } C\subseteq A, \text{ то } A\cap C=C)} (x\in A \wedge x\in B) \vee x\in A\cap C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B) \vee (x\in A \wedge x\in C) \Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in B \vee x\in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B\cup C \Leftrightarrow x\in A\cap(B\cup C)$;
з)($\Rightarrow$) $x\in A\cap\overline{B} \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in\overline{B} \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in U \wedge x\notin B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge \mathrm{T} \wedge x\in U \wedge x\notin B \Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in C \vee x\notin C) \wedge x\in U \wedge x\notin B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in C \wedge x\in U \wedge x\notin B) \vee (x\in A \wedge x\notin C \wedge x\in U \wedge x\notin B) \Rightarrow$
$\Rightarrow x\in C \vee (x\in A\setminus C \wedge x\in U \wedge x\notin B) \Rightarrow^{(A\setminus C\subseteq B)} x\in C \vee (x\in B \wedge x\in U \wedge x\notin B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in C \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow x\in C$.
($\Leftarrow$) $x\in A\setminus C \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin C \Leftrightarrow^{(A\subseteq U)} x\in A \wedge x\in U \wedge x\notin C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge \mathrm{T} \wedge x\in U \wedge x\notin C \Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in B \vee x\notin B) \wedge x\in U \wedge x\notin C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B \wedge x\in U \wedge x\notin C) \vee (x\in A \wedge x\notin B \wedge x\in U \wedge x\notin C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in B \vee (x\in A \wedge x\in\overline{B} \wedge x\notin C) \Leftrightarrow x\in B \vee (x\in A\cap\overline{B} \wedge x\notin C) \Rightarrow^{(A\cap\overline{B}\subseteq C)}$
$\Rightarrow x\in B \vee (x\in C \wedge x\notin C) \Leftrightarrow x\in B \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow x\in B$.

2.20. $x\in P(A\cap B) \Leftrightarrow x\subseteq A\cap B\Leftrightarrow^{(\text{задача2.18а})}\Leftrightarrow x\subseteq A \wedge x\subseteq B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in P(A) \wedge x\in P(B) \Leftrightarrow x\in P(A)\cap P(B)$.

2.21. $x\in P(A)\cup P(B) \Leftrightarrow x\in P(A) \vee x\in P(B) \Leftrightarrow x\subseteq A \vee x\subseteq B \Rightarrow^{(\text{задача2.11а})}$
$\Rightarrow x\subseteq A\cup B \vee x\subseteq A\cup B \Leftrightarrow x\subseteq A\cup B \Leftrightarrow x\in P(A\cup B)$.

2.25. а) Припустимо, що існує деяка формула, що виражає $A\setminus B$ через операції $\cap$, $\cup$ та, можливо, деякі константні множини. Візьмемо елементи a і c, що не входять в жодну з константних множин у формулі. Нехай $A = \{a, c\}$, $B = \{c\}$. За допомогою лише операцій $\cap$ і $\cup$ з цих множин A і B ми не можемо одержати жодної множини, яка б містила a і не містила c. Але $A\setminus B = \{a\}$. Отримано суперечність. б) Аналогічно до п. а) розглянути множини $A = \{a\}$ і $B = \{b\}$. За допомогою лише операцій $\cap$ і $\setminus$ з цих множин A і B ми не можемо одержати множину, що містить елементи a і b одночасно.

2.26. Оскільки невідома множина X задовольняє рівняння $A\cup X = C$, то необхідно виконано $X\subseteq C$. Крім того за умовою $B\subseteq C$, $A\subseteq C$, тому за універсум можна взяти множину C, тобто вважати, що $U = C$. [24]

$$\begin{cases} A\cap X = B, \\ A\cup X = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cap X\subseteq B, \\ B\subseteq A\cap X, \\ A\cup X\subseteq C, \\ C\subseteq A\cup X \end{cases} \Leftrightarrow^{(\text{приклад 2.12, задача 2.18})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X\subseteq \overline{A}\cup B, \\ B\subseteq A, B\subseteq X, \\ A\subseteq C, X\subseteq C, \\ C\cap\overline{A}\subseteq X \end{cases} \Leftrightarrow^{(B\subseteq A\subseteq C)}\Leftrightarrow \begin{cases} B\subseteq X\subseteq B\cup\overline{A} \\ C\cap\overline{A}\subseteq X\subseteq C \end{cases} \Leftrightarrow^{(\text{приклад 2.12, задача 2.18})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B\cup(C\cap\overline{A})\subseteq X \\ X\subseteq(B\cup\overline{A})\cap C \end{cases}.$$

За умови $B\subseteq A\subseteq C$ має місце співвідношення $B\cup(C\cap\overline{A})=(B\cup\overline{A})\cap C$, тому систему зведено до єдиного рівняння $X = B\cup(C\cap\overline{A}) = B\cup(C\cap(C\setminus A)) = B\cup(C\setminus A)$, яке відразу дає відповідь.

2.30. а) Введемо позначення $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, $B = \bigcup_{i\in I} B_i$.
$x\in A\div B \Leftrightarrow (x\in A \wedge \neg(x\in B)) \vee (\neg(x\in A) \wedge x\in B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((\exists i\in I\ x\in A_i) \wedge \neg(\exists i\in I\ x\in B_i)) \vee (\neg(\exists i\in I\ x\in A_i) \wedge (\exists i\in I\ x\in B_i)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((\exists i\in I\ x\in A_i) \wedge (\forall i\in I\ x\notin B_i)) \vee ((\forall i\in I\ x\notin A_i) \wedge (\exists i\in I\ x\in B_i)) \Rightarrow$

[24] Далі використано співвідношення з універсумом, тому універсум треба зафіксувати.

$\Rightarrow \exists i\in I\ (x\in A_i \wedge x\notin B_i) \vee \exists i\in I\ (x\notin A_i \wedge x\in B_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists i\in I\ ((x\in A_i \wedge x\notin B_i) \vee (x\notin A_i \wedge x\in B_i)) \Leftrightarrow x\in \bigcup_{i\in I} (A_i \div B_i)$;

б) Введемо позначення $A = \bigcap_{i\in I} A_i$, $B = \bigcap_{i\in I} B_i$.

$x\in A\div B \Leftrightarrow (x\in A \wedge \neg(x\in B)) \vee (\neg(x\in A) \wedge x\in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((\forall i\in I\ x\in A_i) \wedge \neg(\forall i\in I\ x\in B_i)) \vee (\neg(\forall i\in I\ x\in A_i) \wedge (\forall i\in I\ x\in B_i)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((\forall i\in I\ x\in A_i) \wedge (\exists i\in I\ x\notin B_i)) \vee ((\exists i\in I\ x\notin A_i) \wedge (\forall i\in I\ x\in B_i)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists i\in I\ (x\in A_i \wedge x\notin B_i) \vee \exists i\in I\ (x\notin A_i \wedge x\in B_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists i\in I\ ((x\in A_i \wedge x\notin B_i) \vee (x\notin A_i \wedge x\in B_i)) \Leftrightarrow x\in \bigcup_{i\in I} (A_i \div B_i)$.

2.35. Перше включення випливає з того, що $\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Друге – з $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$.

Глава 3

3.19. а) Доведемо спочатку, що $C(A\backslash Pr_1(C)) = \varnothing$. За означенням проекції елементи множини $Pr_1(C)$ мають непорожній образ при відповідності C, і тільки вони. Тоді образи усіх елементів, що не належать $Pr_1(C)$, порожні. $(A\backslash Pr_1(C))\cap Pr_1(C) = \varnothing$, тому образ кожного елемента з $A\backslash Pr_1(C)$ порожній, тобто $C(A\backslash Pr_1(C)) = \varnothing$. Оскільки $A = Pr_1(C)\cup(A\backslash Pr_1(C))$, то за теоремою 3.8

$C(A) = C(Pr_1(C)\cup(A\backslash Pr_1(C))) = C(Pr_1(C))\cup C((A\backslash Pr_1(C))) = C(Pr_1(C))$.

Оскільки $y\in Pr_2(C) \Leftrightarrow \exists x\ (x, y)\in C \Leftrightarrow^{(C\subseteq A\times B)} \exists x\ (x\in A \wedge (x, y)\in C) \Leftrightarrow y\in C(A)$, отримуємо, що $C(A) = Pr_2(C)$. Включення $Pr_2(C)\subseteq B$ випливає безпосередньо з того, що $C\subseteq A\times B$, і з означення проекції.

3.21. а) $x\in A\cap C^{-1}(B) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in C^{-1}(B) \Leftrightarrow x\in A \wedge$

$\wedge \exists y\ (y\in B \wedge (x, y)\in C) \Leftrightarrow \exists y\ (\underline{x\in A} \wedge y\in B \wedge \underline{(x, y)\in C}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists y\ (x\in A \wedge y\in B \wedge \underline{y\in C(A)} \wedge (x, y)\in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists y\ (y\in C(A)\cap B \wedge (x, y)\in C) \Leftrightarrow x\in C^{-1}(C(A)\cap B)$.

3.22. *Другий спосіб.* ($\Rightarrow$) $x\in A\cap C^{-1}(B) \Leftrightarrow \exists y\ (x\in A \wedge y\in B \wedge (x, y)\in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists y\ (y\in B \wedge y\in C(A)) \Rightarrow^{(C(A)\cap B = \varnothing)}$ F. Отже, $A\cap C^{-1}(B)\subseteq\varnothing$, а тоді $A\cap C^{-1}(B) = \varnothing$.

($\Leftarrow$) $y\in C(A)\cap B \Leftrightarrow \exists x\ (x\in A \wedge (x, y)\in C \wedge y\in B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x\ (x\in A \wedge x\in C^{-1}(B)) \Rightarrow^{(A\cap C^{-1}(B) = \varnothing)}$ F. Отже $C(A)\cap B = \varnothing$.

3.23. Оскільки $C(A)\subseteq B$, то за теоремою 3.7 $C^{-1}(C(A))\subseteq C^{-1}(B)$. За твердженням 3.5 $A\subseteq C^{-1}(C(A))$. Тому за транзитивністю включення $A\subseteq C^{-1}(B)$.

3.27. $Pr_2(C_1)\cap Pr_1(C_2) \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists y\ y\in Pr_2(C_1)\cap Pr_1(C_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists y\ (y\in Pr_2(C_1) \wedge y\in Pr_1(C_2)) \Leftrightarrow \exists y\ (\exists x\ (x, y)\in C_1 \wedge \exists z\ (y, z)\in C_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ \exists z\ ((x, y)\in C_1 \wedge (y, z)\in C_2) \Leftrightarrow \exists x\ \exists z\ \exists y\ ((x, y)\in C_1 \wedge (y, z)\in C_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x\ \exists z\ (x, z)\in C_1\circ C_2 \Leftrightarrow C_1\circ C_2\neq\varnothing$. Отже, $Pr_2(C_1)\cap Pr_1(C_2)\neq\varnothing \Leftrightarrow C_1\circ C_2\neq\varnothing$, тому $C_1\circ C_2=\varnothing \Leftrightarrow Pr_2(C_1)\cap Pr_1(C_2) = \varnothing$.

Глава 4

4.6. Зауважимо, що $(f_1\cup f_2)(x) = f_1(x)\cup f_2(x)$ за будь-якого x. $Pr_1(f_1)\cap Pr_1(f_2) = \varnothing$, тому за будь-якого x хоча б одна з множин $f_1(x)$ або $f_2(x)$ порожня, а інша містить не більше одного елемента. Тоді за будь-якого x множина $(f_1\cup f_2)(x)$ містить не більше одного елемента й відповідність $f_1\cup f_2$ є функціональною за означенням.

4.7. ($\Rightarrow$) Зауважимо, що $(f_1\cup f_2)(x) = f_1(x)\cup f_2(x)$ за будь-якого $x\in A$. f_1 і f_2 є відображеннями з A в B, тому за кожного $x\in A$ множини $f_1(x)$ і $f_2(x)$ є одноелементними. Якщо $f_1(x)\neq f_2(x)$, то множина $(f_1\cup f_2)(x)$ містить два елементи, а тоді $f_1\cup f_2$ не є функцією, що суперечить умові. Тому $f_1(x) = f_2(x)$ для кожного $x\in A$. За теоремою 3.2 $f_1 = f_2$. ($\Leftarrow$) Якщо $f_1 = f_2$, то $f_1\cup f_2 = f_1$ і є відображенням за умовою.

4.8. ($\Rightarrow$) Зауважимо, що $(f_1\cap f_2)(x) = f_1(x)\cap f_2(x)$ за кожного елемента $x\in A$. f_1 і f_2 – відображення з A в B, тому за кожного елемента $x\in A$ множини $f_1(x)$ і $f_2(x)$ є одноелементними. Якщо $f_1(x)\neq f_2(x)$, то множина $(f_1\cap f_2)(x)$ порожня, а тоді $f_1\cap f_2$ не всюди визначена на A, що суперечить умові. Тому $f_1(x) = f_2(x)$ за кожного $x\in A$. За теоремою 3.2 $f_1 = f_2$. ($\Leftarrow$) Якщо $f_1 = f_2$, то $f_1\cap f_2 = f_1$ і є відображенням за умовою.

4.9. ($\Rightarrow$) Зауважимо, що $(f_1\backslash f_2)(x) = f_1(x)\backslash f_2(x)$ за кожного $x\in A$. f_1 і f_2 – відображення з A в B, тому за кожного $x\in A$ множини $f_1(x)$ і $f_2(x)$ є одноелементними. Якщо $f_1\cap f_2\neq\varnothing$, то за деякого x_0 множина $(f_1\cap f_2)(x_0)$ непорожня і $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, тоді $(f_1\backslash f_2)(x_0) = \varnothing$ і $f_1\backslash f_2$ не всюди визначена на A, що суперечить умові. Отже $f_1\cap f_2 = \varnothing$. ($\Leftarrow$) Якщо $f_1\cap f_2 = \varnothing$, то $f_1\backslash f_2 = f_1$ і є відображенням за умовою.

4.10. Зауважимо, що $(f_1\div f_2)(x) = f_1(x)\div f_2(x)$ за кожного $x\in A$. f_1 і f_2 є відображеннями з A в B, тому за кожного $x\in A$ множини $f_1(x)$ і $f_2(x)$ є одноелементними. Тоді множина $f_1(x)\div f_2(x)$ містить 0 або 2 елементи. Перше суперечить всюди визначеності відповідності $f_1\div f_2$. Друге – її функціональності. В обох випадках відповідність $f_1\div f_2$ не є відображенням.

4.12. $a\in A \Rightarrow^{(C_1\circ C_2\ \text{всюди визначена})} \exists c\ (a, c)\in C_1\circ C_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists c\ \exists b\ ((a, b)\in C_1 \wedge (b, c)\in C_2) \Rightarrow \exists c\ \exists b\ (a, b)\in C_1 \Leftrightarrow \exists b\ (a, b)\in C_1$.

4.14. $(y, z_1)\in C_2 \wedge (y, z_2)\in C_2 \Rightarrow^{(C_1\ \text{сюр'єктивна})} (y, z_1)\in C_2 \wedge (y, z_2)\in C_2 \wedge$

$\wedge \exists x\ (x, y)\in C_1 \Leftrightarrow \exists x\ ((y, z_1)\in C_2 \wedge (y, z_2)\in C_2 \wedge (x, y)\in C_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x\ ((x, y)\in C_1 \wedge (y, z_1)\in C_2 \wedge (x, y)\in C_1 \wedge (y, z_2)\in C_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x\ ((x, z_1)\in C_1\circ C_2 \wedge (x, z_2)\in C_1\circ C_2) \Rightarrow^{(C_1\circ C_2\ \text{функція})} z_1 = z_2$.

4.16. $(x, y_1)\in f^{-1}\circ f \wedge (x, y_2)\in f^{-1}\circ f \Leftrightarrow \exists z\ ((x, z)\in f^{-1} \wedge (z, y_1)\in f) \wedge$

$\wedge \exists z\ ((x, z)\in f^{-1} \wedge (z, y_2)\in f) \Leftrightarrow \exists z\ ((z, x)\in f \wedge (z, y_1)\in f) \wedge$

$\wedge \exists z\ ((z, x)\in f \wedge (z, y_2)\in f) \Rightarrow^{(f\text{-функція})} (x = y_1) \wedge (x = y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$.

4.17. ($\Rightarrow$) Спочатку зауважимо таке:

1) $(x_1, y)\in f \wedge (x_2, y)\in f \Leftrightarrow (x_1, y)\in f \wedge (y, x_2)\in f^{-1} \Rightarrow (x_1, x_2)\in f\circ f^{-1}$;

2) $(x_1, y)\in f \Leftrightarrow (x_1, y)\in f \wedge (x_1, y)\in f \Leftrightarrow (x_1, y)\in f \wedge (y, x_1)\in f^{-1} \Rightarrow (x_1, x_1)\in f\circ f^{-1}$.

Тепер, $(x_1, y)\in f \wedge (x_2, y)\in f \Rightarrow (x_1, x_2)\in f\circ f^{-1} \wedge (x_1, x_1)\in f\circ f^{-1} \Rightarrow^{(f\circ f^{-1}\ \text{є функцією})} x_1 = x_2$.

(⇐) Якщо f є ін'єкцією, то відповідність f^{-1} є функцією. Тоді за задачею 4.16 відповідність $(f^{-1})^{-1}\circ f^{-1} = f\circ f^{-1}$ є функцією.

4.19. (⇒) За теоремою 4.6.

(⇐) $(x, y_1)\in C \wedge (x, y_2)\in C \Rightarrow x\in C^{-1}(\{y_1\}) \wedge x\in C^{-1}(\{y_2\}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in C^{-1}(\{y_1\})\cap C^{-1}(\{y_2\}) \Leftrightarrow^{(C^{-1}(A\cap B) = C^{-1}(A)\cap C^{-1}(B))} x\in C^{-1}(\{y_1\}\cap\{y_2\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{y_1\}\cap\{y_2\} \ne \varnothing \Leftrightarrow y_1 = y_2$.

4.21. (⇒) За теоремою 4.6.

(⇐) *Перший спосіб*. Нехай A і B – довільні множини, тоді $A\cap B = ((A\cup B)\backslash(A\backslash B))\backslash(B\backslash A)$. Операція взяття прообразу множини дистрибутивна відносно операції об'єднання для довільної відповідності (теорема 3.8) і за умовою дистрибутивна відносно різниці, тому за наведеною тотожністю вона дистрибутивна відносно перетину. За задачею 4.19 отримуємо, що відповідність C є функціональною.

(⇐) *Другий спосіб*. Якщо $y_1 \ne y_2$, то $\{y_1\} = \{y_1\}\backslash\{y_2\}$, тому

$(x, y_1)\in C \wedge (x, y_2)\in C \wedge (y_1 \ne y_2) \Rightarrow x\in C^{-1}(\{y_1\}) \wedge x\in C^{-1}(\{y_2\}) \wedge (y_1 \ne y_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in C^{-1}(\{y_1\}\backslash\{y_2\}) \wedge x\in C^{-1}(\{y_2\}) \Rightarrow^{(C^{-1}(A\backslash B) = C^{-1}(A)\backslash C^{-1}(B))}$

$\Rightarrow x\in C^{-1}(\{y_1\})\backslash C^{-1}(\{y_2\}) \wedge x\in C^{-1}(\{y_2\}) \Rightarrow$ F.

4.23. (⇒) Скористайтесь тотожністю $A\div B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$, теоремою 3.8 та задачею 4.21.

(⇐) *Перший спосіб*. Оскільки $A\cap B = (A\cup B)\div(A\div B)$, то з умови випливає дистрибутивність операції взяття прообразу відносно перетину, а тоді за задачею 4.19 відповідність C є функціональною.

(⇐) *Другий спосіб*. Якщо $y_1 \ne y_2$, то $\{y_1, y_2\} = \{y_1\}\div\{y_2\}$, тому

$(x, y_1)\in C \wedge (x, y_2)\in C \wedge (y_1 \ne y_2) \Rightarrow x\in C^{-1}(\{y_1\}) \wedge x\in C^{-1}(\{y_2\}) \wedge (y_1 \ne y_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow x\notin C^{-1}(\{y_1\})\div C^{-1}(\{y_2\}) \wedge x\in C^{-1}(\{y_1, y_2\}) \Rightarrow^{(C^{-1}(A\div B) = C^{-1}(A)\div C^{-1}(B))}$

$\Rightarrow x\notin C^{-1}(\{y_1\}\div\{y_2\}) \wedge x\in C^{-1}(\{y_1, y_2\}) \Leftrightarrow x\notin C^{-1}(\{y_1, y_2\}) \wedge x\in C^{-1}(\{y_1, y_2\}) \Rightarrow$ F.

4.25. (⇒) За теоремою 4.6.

(⇐) $(x, y_1)\in C \wedge (x, y_2)\in C \Leftrightarrow (x, y_1)\in C \wedge (x, y_2)\in C \wedge x\in C^{-1}(\{y_2\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y_1)\in C \wedge (x, y_2)\in C \wedge y_1\in C(C^{-1}(\{y_2\})) \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1\in C(C^{-1}(\{y_2\})) \Leftrightarrow^{(\text{за умовою задачі})} y_1\in\{y_2\} \Rightarrow y_1 = y_2$.

4.32. Нехай $f\in(A^B)^C$. Розглянемо відповідність $h_f = \{((b, c), f(c)(b)) \mid b\in B \wedge c\in C\}$ між множинами $B\times C$ і A. Відповідність h_f є всюди визначеною на $B\times C$, оскільки відповідність f всюди визначена на C і відповідність $f(c)$ всюди визначена на B. f і $f(c)$ є функціями, тому h_f є функцією за побудовою. Отже, $h_f\in A^{B\times C}$.

Розглянемо відповідність $\varphi = \{(f, h_f) \mid f\in(A^B)^C\}$. За побудовою φ є відповідністю між $(A^B)^C$ і $A^{B\times C}$. Для кожного елемента f множини $(A^B)^C$ його образ $\{h_f\}$ при відповідності φ є одноелементною множиною. Отже, φ є відображенням з $(A^B)^C$ в $A^{B\times C}$.

Доведемо, що відображення φ сюр'єктивне. Нехай $h\in A^{B\times C}$. Розглянемо відповідність $f = \{(c, \{(b, a) \mid ((b, c), a)\in h\}) \mid c\in C\}$, яка за побудовою є всюди визначеною й функціональною відповідністю між C і A^B. Отже, $f\in(A^B)^C$. За побудовою f виконано $h_f = h$, тобто $\varphi(f) = h$. Сюр'єктивність φ доведено.

Доведемо, що відображення φ ін'єктивне. Нехай $h\in A^{B\times C}$ і існують такі відображення $f_1, f_2\in(A^B)^C$, що $\varphi(f_1) = \varphi(f_2) = h$. Припустимо, що $f_1 \ne f_2$. Це означає, що за деякого $c\in C$ виконано $f_1(c) \ne f_2(c)$. Останнє в свою чергу означає, що за деякого $b\in B$ $(f_1(c))(b) \ne (f_2(c))(b)$, але тоді $\varphi(f_1) \ne \varphi(f_2)$. З отриманої суперечності випливає хибність припущення, тобто необхідно виконано $f_1 = f_2$. Звідси відображення φ є ін'єктивним.

Отже, φ є бієкцією між множинами $(A^B)^C$ і $A^{B\times C}$.

Глава 5

5.2. $(a, b)\in R \wedge (b, a)\in R \Rightarrow (a, a)\in R\circ R \Rightarrow^{(R\ \text{транзитивне})} (a, a)\in R \Rightarrow$

$\Rightarrow^{(R\ \text{антирефлексивне})}$ F. Звідси $a = b$.

5.3. *Перший спосіб*. З теореми 5.1 випливає, що $i_A\subseteq R_1$ і $i_A\subseteq R_2$. Тоді $R_1\circ R_2 = (R_1\cup i_A)\circ(R_2\cup i_A) = (R_1\circ i_A)\cup(R_1\circ R_2)\cup(i_A\circ R_2)\cup(i_A\circ i_A) = R_1\cup(R_1\circ R_2)\cup$ $\cup R_2\cup i_A = (R_1\circ R_2)\cup(R_1\cup R_2)$, звідки $R_1\cup R_2\subseteq R_1\circ R_2$.

Другий спосіб. $(x, y)\in R_1\cup R_2 \Leftrightarrow (x, y)\in R_1 \vee (x, y)\in R_2 \Rightarrow^{(R_1\ \text{і}\ R_2\ \text{рефлексивні})}$

$\Rightarrow ((x, y)\in R_1 \wedge (y, y)\in R_2) \vee ((x, x)\in R_1 \wedge (x, y)\in R_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y)\in R_1\circ R_2 \wedge (x, y)\in R_1\circ R_2 \Leftrightarrow (x, y)\in R_1\circ R_2$.

5.5. $((R_1\circ R_2)\cup(R_2\circ R_1))^{-1} = (R_1\circ R_2)^{-1}\cup(R_2\circ R_1)^{-1} =$

$= (R_2^{-1}\circ R_1^{-1})\cup(R_1^{-1}\circ R_2^{-1}) = (R_2\circ R_1)\cup(R_1\circ R_2) = (R_1\circ R_2)\cup(R_2\circ R_1)$.

5.6. (⇒) З симетричності R_1, R_2, $R_1\circ R_2$ маємо $R_1\circ R_2 = (R_1\circ R_2)^{-1} =$ $= (R_2)^{-1}\circ(R_1)^{-1} = R_2\circ R_1$. (⇐) $(R_1\circ R_2)^{-1} = (R_2)^{-1}\circ(R_1)^{-1} = R_2\circ R_1 = R_1\circ 1_2$.

5.7. Відношення $R\cup R^{-1}$ є симетричним: $(R\cup R^{-1})^{-1} = R^{-1}\cup(R^{-1})^{-1} =$ $= R^{-1}\cup R = R\cup R^{-1}$. Нехай Q – довільне симетричне відношення, яке включає R. Тоді $Q = Q^{-1}$. З $R\subseteq Q$ маємо $R^{-1}\subseteq Q^{-1} = Q$, тобто $R^{-1}\subseteq Q$, звідки $R\cup R^{-1}\subseteq Q$.

5.8. R транзитивне, тому $R\circ R\subseteq R$. R рефлексивне, тому $R = R\cup R\subseteq R\circ R$ (задача 5.3). Отже, $R\circ R = R$.

5.9. R рефлексивне, тому $R^* = R^+$. З транзитивності R за теоремою 5.9 маємо $R^+ = R$.

5.10. $R\cap R^{-1}$ є рефлексивним як перетин рефлексивних. $(R\cap R^{-1})^{-1} =$ $= R^{-1}\cap(R^{-1})^{-1} = R^{-1}\cap R = R\cap R^{-1}$, тому $R\cap R^{-1}$ є симетричним. $R\cap R^{-1}$ є транзитивним як перетин транзитивних.

5.11. (⇒) Еквівалентність R є рефлексивною ($i_A\subseteq R$), симетричною ($R^{-1} = R$) та транзитивною ($R\circ R\subseteq R$). Тоді $(R\circ R^{-1})\cup i_A = (R\circ R)\cup i_A\subseteq R\cup i_A = R$ З рефлексивності R за задачею 5.3 маємо

$R = R\cup R\subseteq(R\circ R)\cup i_A = (R\circ R^{-1})\cup i_A$.

Отже, $(R\circ R^{-1})\cup i_A = R$.

(⇐) За умовою, $i_A\subseteq R$, $R^{-1} = ((R\circ R^{-1})\cup i_A)^{-1} = (R\circ R^{-1})^{-1}\cup i_A^{-1} =$ $= ((R^{-1})^{-1}\circ R^{-1})\cup i_A = (R\circ R^{-1})\cup i_A = R$. Звідси $R\circ R = R\circ R^{-1}\subseteq(R\circ R^{-1})\cup i_A = R$. Отже, за критеріями R є рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням на A, тобто еквівалентністю.

5.12. (⇒) Див. задачу 5.6. (⇐) Відношення $R_1\circ R_2$ рефлексивне як композиція рефлексивних. Симетричність доведено в задачі 5.6. Доведемо транзитивність, скориставшися транзитивністю R_1, R_2.

$(R_1\circ R_2)\circ(R_1\circ R_2) = R_1\circ(R_2\circ R_1)\circ R_2 = R_1\circ(R_1\circ R_2)\circ R_2 =$
$= (R_1\circ R_1)\circ(R_2\circ R_2)\subseteq R_1\circ R_2$.

5.14. ($\Rightarrow$) За транзитивністю відношення $R_1\circ R_2\circ R_1$ маємо $R_2\circ R_1\circ R_2 = i_A\circ R_2\circ R_1\circ i_A\circ R_2\circ i_A\subseteq R_1\circ R_2\circ R_1\circ R_1\circ R_2\circ R_1 = (R_1\circ R_2\circ R_1)\circ(R_1\circ R_2\circ R_1)\subseteq$ $\subseteq R_1\circ R_2\circ R_1$.

($\Leftarrow$) $R_1\circ R_2\circ R_1$ рефлексивне як композиція рефлексивних. $(R_1\circ R_2\circ R_1)^{-1} = R_1^{-1}\circ R_2^{-1}\circ R_1^{-1} = R_1\circ R_2\circ R_1$, тобто $R_1\circ R_2\circ R_1$ симетричне.

R_1 і R_2 – транзитивні відношення, тому з використанням умови маємо

$(R_1\circ R_2\circ R_1)\circ(R_1\circ R_2\circ R_1) = R_1\circ R_2\circ R_1\circ R_1\circ R_2\circ R_1 = R_1\circ R_2\circ(R_1\circ R_1)\circ R_2\circ R_1\subseteq$
$\subseteq R_1\circ R_2\circ R_1\circ R_2\circ R_1 = R_1\circ(R_2\circ R_1\circ R_2)\circ R_1\subseteq R_1\circ(R_1\circ R_2\circ R_1)\circ R_1 =$
$= (R_1\circ R_1)\circ R_2\circ(R_1\circ R_1)\subseteq R_1\circ R_2\circ R_1$.

Отже, відношення $R_1\circ R_2\circ R_1$ є транзитивним, а тоді й еквівалентністю.

5.17. Відношення $(R\cup R^{-1})^*$ є рефлексивним, симетричним, транзитивним, тобто є еквівалентністю. Нехай Q – довільна еквівалентність, яка включає R. Доведемо, що $(R\cup R^{-1})^*\subseteq Q$. Відношення Q є симетричним, тому $R\cup R^{-1}\subseteq Q$ за задачею 5.7. За теоремою 5.12 найменшим транзитивним відношенням, яке включає $R\cup R^{-1}$, є $(R\cup R^{-1})^+$, тому $(R\cup R^{-1})^+\subseteq Q$. Відношення Q рефлексивне, тому $i_A\subseteq Q$. Звідси $(R\cup R^{-1})^* = (R\cup R^{-1})^+\cup i_A\subseteq Q$.

Глава 6

6.1. Застосуємо індукцію за n. *База*. $n = 2$. З $x_1\le x_2\le x_1$ та антисиметричності $\le$ маємо $x_2 = x_1$. *Перехід*. Припущення: з $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\le x_1$ випливає $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Припустимо, що $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\le x_{n+1}\le x_1$. З транзитивності $\le$ маємо $x_n\le x_1$, звідки за припущенням індукції $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. За антисиметричністю $\le$ з $x_n\le x_{n+1}\le x_1$ отримуємо $x_{n+1} = x_1$.

6.2. Відношення T є рефлексивним і транзитивним на всій множині R:

$\forall a\in R\ a/(a^2+1)\le a/(a^2+1)\Rightarrow\forall a\in R\ aTa$,

$aTb\wedge bTc\Leftrightarrow a/(a^2+1)\le b/(b^2+1)\wedge b/(b^2+1)\le c/(c^2+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow a/(a^2+1)\le c/(c^2+1)\Leftrightarrow aTc$.

Проте воно не є антисиметричним на R. а) Нехай $a = 0.5$, $b = 2$. Тоді aTb і bTa, але $a\ne b$ і відношення T не є антисиметричним на R. б) Антисиметричність:

$aTb\wedge bTa\Leftrightarrow a/(a^2+1)\le b/(b^2+1)\wedge b/(b^2+1)\le a/(a^2+1)\Leftrightarrow b/(b^2+1) = a/(a^2+1)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (b-a)(ab-1) = 0\Rightarrow^{(a,b\in[1;\infty))} a = b$.

6.3. Воно не є антисиметричним: $(6, 15)\le(14, 35)$ і $(14, 35)\le(6, 15)$, але $(6, 15)\ne(14, 35)$.

6.4. ($\Rightarrow$) Припустимо, що $N(A)\ge 2$ і $N(B)\ge 2$. Тоді в множині A знайдуться два різних елементи a_1 і a_2 такі, що $a_1\le_A a_2$. Аналогічно, в множині B знайдуться два різних елементи b_1 і b_2 такі, що $b_1\le_B b_2$. Пари (a_1, b_2) і (a_2, b_1) непорівнювані за порядком $\le_A\times\le_B$. Отже, $N(A) = 1$ або $N(B) = 1$.

($\Leftarrow$) Нехай $N(A) = 1$, тобто $A = \{a\}$. За будь-яких b_1 і b_2 пари (a, b_1) і (a, b_2) порівнювані, оскільки $a\le_A a$ та порівнювані b_1 і b_2. Аналогічно й випадок $N(B) = 1$.

6.8. Припустимо, що множина M, складена з попарно непорівнюваних елементів множини N^n, є нескінченною. Виділимо $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – елемент множини M. Довільні два елементи множини M непорівнювані, тому для довільного елемента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(x\ne t)$ множини M існують числа $i(x)$ і $j(x)$, при яких $t_{i(x)} < x_{i(x)}$ і $t_{j(x)} > x_{j(x)}$.

Розглянемо множини вигляду $A_{ij} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in M\mid t_i < x_i,\ x_j < t_j\}$. Очевидно, що $M = \bigcup_{i,j} A_{ij}$, причому множина вказаних пар (i, j) є скінченною. Тоді необхідно існують i і j, при яких множина A_{ij} нескінченна (інакше M була б скінченною).

Розглянемо множини $B_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in M\mid t_i < x_i,\ x_j = k\}$, де $0\le k < t_j$. Їх кількість дорівнює t_j, а $\bigcup_k B_k = A_{ij}$, тому хоча б одна з B_k нескінченна. Звідси існує натуральне число h, $h < t_j$, при якому множина $M_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in M\mid t_i < x_i,\ x_j = h\}$ нескінченна.

Повторивши цю процедуру, ми отримаємо послідовність нескінченних множин $M_{n-1}\subseteq\ldots\subseteq M_2\subseteq M_1\subseteq M$. Ці множини M_m характерні тим, що при кожному m $(1\le m\le n-1)$ для всіх $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ з множини M_m існують m компонент $i_1, \ldots, i_m$, в яких $x_{i_j} = y_{i_j}$, $j\in\overline{1,m}$.

Тоді існує натуральне число k, за якого для всіх $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ з множини M_{n-1} справджується $x_j = y_j$ для всіх j, $j\ne k$. Отже, будь-які два елементи множини M_{n-1} є порівнюваними, що суперечить їх попарній непорівнюваності згідно з побудовою M_{n-1}. Ця суперечність завершує доведення.

6.10. ($\Rightarrow$) Якщо частково впорядкована множина має найменший елемент, то за теоремою 6.3 він є єдиним мінімальним незалежно від скінченності множини.

($\Leftarrow$) Нехай скінченна частково впорядкована множина $(A, \le)$ має рівно один мінімальний елемент, скажімо, a_0. Розглянемо множину $A' = \{a\mid a$ і a_0 не порівнювані за $\le\}$ з частковим порядком $\le' = \le\cap(A'\times A')$. Якщо множина A' порожня, то a_0 порівнюваний з кожним елементом множини A, і з його мінімальності випливає найменшість. Якщо частково впорядкована множина $(A', \le')$ непорожня, то за теоремою 6.5 існує мінімальний елемент $a_1\in A'$. Доведемо, що a_1 є мінімальним в A. Припустимо, що $a_2\le a_1$ для деякого елемента $a_2\in A$, $a_2\ne a_1$. Проте a_1 є мінімальним в A', тому $a_2\in A\backslash A'$, але тоді $a_0\le a_2\le a_1$. За побудовою множини A' елементи a_1 і a_0 непорівнювані. Отримано суперечність. Отже, множина A' порожня і єдиний мінімальний елемент є найменшим.

Частково впорядкована множина $(Z\cup\{a\}, \le\cup\{(a, a)\})$ має рівно один мінімальний і максимальний елемент, але не має ані найменшого, ані найбільшого.

6.19. ($\Rightarrow$) Використайте задачу 6.17.

($\Leftarrow$) Нехай множина $(A_0, \leq)$ є цілком упорядкованою відносно заданого та двоїстого порядків. Тоді вона має найменший та найбільший елемент, a_0 і b_0, відповідно. Множина $A_1 = A_0 \backslash \{a_0, b_0\}$ або порожня, або має найменший та найбільший елементи, a_1 і b_1, відповідно. Далі розглянемо множину $A_2 = A_1 \backslash \{a_1, b_1\}$ тощо. Якщо на деякому кроці отримано порожню множину, то множина A_0 скінченна. Якщо цей процес є нескінченним, то отримано нескінченний спадний ланцюг $b_0 > b_1 > b_2 > \ldots$, що суперечить умові обриву спадних ланцюгів, тобто повній упорядкованості множини $(A_0, \leq)$. Отже, процес скінченний.

6.21. б) c є нижньою гранню множини $\{a, b\}$, оскільки $c \leq a$ і $c \leq b$. За означенням $\inf\{a, b\}$ – це найбільша з усіх нижніх граней, тому $c \leq \inf\{a, b\}$.

д) $a \leq c \leq \sup\{c, d\}$ і $b \leq d \leq \sup\{c, d\}$, оскільки $a \leq c$ і $b \leq d$. Звідси $a \leq \sup\{c, d\}$ і $b \leq \sup\{c, d\}$. $\sup\{c, d\}$ є верхньою гранню множини $\{a, b\}$, а $\sup\{a, b\}$ – найменша з верхніх граней множини $\{a, b\}$, тому $\sup\{a, b\} \leq \sup\{c, d\}$;

є) $a \leq c$ і $a \leq \sup\{a, b\}$, тому за п. б) $a \leq \inf\{\sup\{a, b\}, c\}$. $\inf\{b, c\} \leq c$ і $\inf\{b, c\} \leq b \leq \sup\{a, b\}$, тому за п. б) $\inf\{b, c\} \leq \inf\{\sup\{a, b\}, c\}$. За п. a) $\sup\{a, \inf\{b, c\}\} \leq \inf\{\sup\{a, b\}, c\}$.

з) $a \leq \sup\{a, \sup\{b, c\}\}$,

$b \leq \sup\{b, c\} \leq \sup\{a, \sup\{b, c\}\}$, $b \leq \sup\{a, \sup\{b, c\}\}$,

$c \leq \sup\{b, c\} \leq \sup\{a, \sup\{b, c\}\}$, $c \leq \sup\{a, \sup\{b, c\}\}$.

За п. а) отримуємо $\sup\{a, b\} \leq \sup\{a, \sup\{b, c\}\}$. Ще раз застосуємо п. a), щоб отримати $\sup\{\sup\{a, b\}, c\} \leq \sup\{a, \sup\{b, c\}\}$.

Аналогічно встановлюється, що $\sup\{a, \sup\{b, c\}\} \leq \sup\{\sup\{a, b\}, c\}$. З антисиметричності $\leq$ випливає шукана рівність;

й) $\inf\{a, \inf\{b, c\}\} \leq a$, $\inf\{a, \inf\{b, c\}\} \leq \inf\{b, c\}$, $\inf\{b, c\} \leq b$, $\inf\{b, c\} \leq c$. Отже, $\inf\{a, \inf\{b, c\}\}$ є нижньою гранню множини $\{a, b, c\}$, звідки $\inf\{a, \inf\{b, c\}\} \leq \inf\{a, b, c\}$. З іншого боку, $\inf\{a, b, c\} \leq b$, $\inf\{a, b, c\} \leq c$, отже, $\inf\{a, b, c\}$ є нижньою гранню множини $\{b, c\}$ і $\inf\{a, b, c\} \leq \inf\{b, c\}$. $\inf\{a, b, c\} \leq a$, тому $\inf\{a, b, c\}$ є нижньою гранню множини $\{a, \inf\{b, c\}\}$, звідки $\inf\{a, b, c\} \leq \inf\{a, \inf\{b, c\}\}$. Поєднуючи отримані оцінки та враховуючи антисиметричність $\leq$, маємо $\inf\{a, b, c\} = \inf\{a, \inf\{b, c\}\}$.

л) $a \leq a$, $\inf\{a, b\} \leq a$, тому за п. a) $\sup\{\inf\{a, b\}, a\} \leq a$. З іншого боку, за означенням верхньої грані $a \leq \sup\{\inf\{a, b\}, a\}$. За антисиметричністю $\leq$ маємо рівність $\sup\{\inf\{a, b\}, a\} = a$.

6.24. Кожна нижня грань c множини B одночасно є нижньою гранню множини A, тому $c \leq a$. За умовою a також є нижньою гранню множини B, тому a – найбільша з множини нижніх граней множини B, тобто $a = \inf B$.

6.33. ($\Leftarrow$) Доведемо, що кожна непорожня підмножина $B \subseteq A$ має $\sup B$. Множина A має найбільший елемент, тому множина C верхніх граней множини B непорожня і за умовою існує $\inf C$. Кожен елемент множини B є нижньою гранню множини C, тому $\inf C$ не менше довільного елемента

множини B, а отже $\inf C$ є верхньою гранню множини B, тобто $\inf C \in C$. $\inf C$ є найменшою серед верхніх граней множини B, тобто $\sup B = \inf C$.

6.35. Припустимо, що $f(a) < a$ за деякого $a \in A$. Тоді за умовою $f(f(a)) \leq f(a)$. За бієктивністю f з $f(a) \neq a$ отримуємо $f(f(a)) \neq f(a)$ і $f(f(a)) < f(a)$. Продовжуючи цей процес далі, отримаємо нескінчений спадний ланцюг $\ldots < f(f(a)) < f(a) < a$, який не має найменшого елемента. Це суперечить повній упорядкованості множини A.

6.36. а) f і g є перетвореннями M, тому $f \circ g$ теж є перетворенням M. Доведемо, що перетворення $f \circ g$ є монотонним:

$a \leq b \Rightarrow^{(\text{за монотонністю } f)} f(a) \leq f(b) \Rightarrow^{(\text{за монотонністю } g)} (f \circ g)(a) =$

$= g(f(a)) \leq g(f(b)) = (f \circ g)(b)$.

Список літератури

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М., 1977.
2. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. М., 2001.
3. Ершов Ю.А., Палютин Е.А. Математическая логика. – М., 1979.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної мтематики. – К., 2002.
5. Куратовский К. Топология: В 2 т. – М., 1966. – Т.1.
6. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – М., 1970.
7. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – 4-е изд. – М., 2001.
8. Мальцев А.И. Алгебраические системы.– М., 1969.
9. Математический энциклопедический словарь. – М., 1988.
10. Методичні рекомендації та вказівки до вивчення курсу ”Дискретна математика” /розділ ”Множини та відповідності”/ для студентів факультету кібернетики. / Упоряд. А.Б.Ставровський, Ю.В.Коваль. – К., 1994.
11. Трохимчук Р.М. Множини і відношення. – К., 1993.
12. Трохимчук Р.М. Збірник задач з дискретної математики: Розділ ”Множини і відношення”. – К., 1997.

ЗМІСТ